

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1959)  
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE  
**Kapitel:** 4. Une interprétation du principe de Thomson.  
**Autor:** Hersch, Joseph  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35495>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

4. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE THOMSON.

4.1. Modifions d'une autre façon le problème physique initial (§ 2): Découpons en lanières  $G_j$  la plaque homogène (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. Quand l'intensité est-elle inchangée? Lorsque, initialement, aucun courant  $\vec{i} = \text{grad } \varphi$  ne traversait les coupures, c'est-à-dire si toutes les coupures sont des lignes de flux de  $\text{grad } \varphi$  (§ 2).

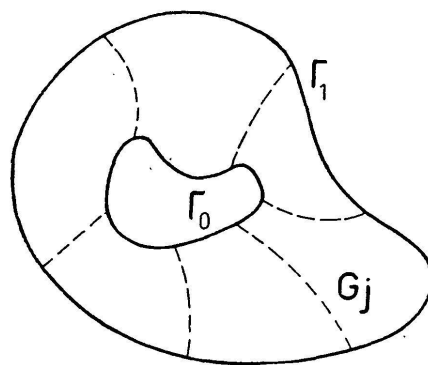


Fig. 5

Appelons  $\omega(x, y)$  le potentiel pour le problème modifié,

$\tilde{I}$  l'intensité totale et  $\tilde{J}$  la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a  $\omega = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\omega = 1$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$  sur les coupures,  $\Delta \omega = 0$  dans chaque  $G_j$ .

On a encore  $\tilde{J} = V \cdot \tilde{I} = \tilde{I}$ , donc  $D(\varphi) = J = I \geq \tilde{I} = \tilde{J} = D(\omega)$ .

Notre plaque se comporte à présent comme un système de résistances  $R_1, R_2, \dots, R_m$  connectées en parallèle:

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^m \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j} \quad (\text{car } V = 1).$$

Appelons  $\omega_j$  la restriction de  $\omega$  à  $G_j$ ;

$$\tilde{J}_j = D(\omega_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} ds = \tilde{I}_j,$$

où  $\Gamma_{1j}$  est la partie de  $\Gamma_1$  qui borde  $G_j$ .

4.2. Considérons le cas limite où les lanières  $G_j$  sont de largeur infinitésimale. Le découpage de  $G$  est alors équivalent à un choix des lignes de flux d'un champ vectoriel. Soit  $\vec{p}$  un tel champ, de divergence nulle; la direction de  $\vec{p}$  est déterminée en

tout point; sa grandeur  $p = p(s)$  est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation  $\operatorname{div} \vec{p} = 0$  est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour  $p(s)$ ; une solution est  $\operatorname{grad} \omega$  (c'est-à-dire:  $\operatorname{grad} \omega_j$  dans la bande infinitésimale  $G_j$ ); donc, dans  $G_j$ ,  $\vec{p} = t_j \operatorname{grad} \omega_j$  ( $t_j$  est constante dans  $G_j$ ). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} = \frac{\left[ \sum_j t_j D(\omega_j) \right]^2}{\sum_j t_j^2 D(\omega_j)} \leq \sum_j D(\omega_j) =$$

$$= D(\omega) = I \leq I = J = D(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. UN PASSAGE THOMSON  $\longrightarrow$  DIRICHLET,  
à l'aide des lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  d'une fonction  $\nu$   
concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons  $\vec{p}$  en imposant  $\oint_{\gamma} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour toute courbe fermée  $\gamma$  séparant  $\Gamma_0$  de  $\Gamma_1$ ; pour ces champs concurrents  $\vec{p}$ , on a

$$D(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1}.$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition  $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour les seuls lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  de  $\nu$ ; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$D(\varphi) \leq \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1};$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à  $D(u)$  (cf. § 3. 1), donc  $D(\varphi) \leq D(u) \leq D(\nu)$ , et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.