Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR DEFINITION DES KRÜMMUNGSRADIUS KONVEXER KURVEN
Autor: Groemer, Helmut
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36345

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ZUR DEFINITION DES KRÜMMUNGSRADIUS KONVEXER KURVEN

von Helmut GROEMER in Corvallis, Ore., U.S.A.

(Reçu le 5 janvier 1961)

Es liege eine ebene konvexe Kurve, das heisst der Rand C eines konvexen Bereiches C^0 vor. Ist P ein Punkt von C, so gibt es mehrere Möglichkeiten den Krümmungsradius von C im Punkte P zu erklären. Eine der bekanntesten Definitionen ist die folgende (siehe dazu B. JESSEN [1]).

Definition 1: Ausser dem festen Punkt P werde auf C noch ein Punkt X gewählt. $R(P, X)$ bezeichne den Radius eines Kreises, der durch P und X geht und C in P berührt, das heisst C und der Kreis haben in P eine gemeinsame Stützgerade. Existiert der Grenzwert

$$R = \lim_{X \to P} R(P, X) \ , \tag{1}$$

so heisse R der Krümmungsradius von C im Punkte P. (Falls C im Punkte P mehrere Stützgeraden hat, ist $R(P, X)$ nicht eindeutig definiert. Dies ist jedoch ohne Bedeutung, da sich bei jeder Wahl $R = 0$ ergibt.)

Die Werte $R = 0$ und $R = \infty$ seien stets zulässig. Im folgenden soll in zwei verschiedenen Formulierungen auf eine weitere einfache Möglichkeit, R zu definieren, hingewiesen werden. Es wird sich herausstellen, dass das durch die neue Definition gelieferte R mit (1) übereinstimmt. Ist P ein Punkt von C und K ein durch P gehender Kreis, so soll zunächst folgende Ausdrucksweise eingeführt werden: K heisse bei P innerhalb C liegend, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so dass $K \cap U \subset C^0$ ist. K heisse bei P ausserhalb C liegend, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so dass $K \cap U$ mit $C^0 - C$ keine Punkte gemeinsam hat. Die entarteten Kreise vom Radius 0 oder ∞ sollen nirgends ausgeschlossen sein.

Nun kann die folgende axiomatische Definition des Krümmungsradius gegeben werden.

Definition 2: Ein Zahl R heisse der Krümmungsradius von C im Punkte P, wenn es zu jedem R' mit $R' < R$ einen Kreis vom Radius R' gibt, der bei P innerhalb C liegt, und zu jedem R'' mit $R'' > R$ einen Kreis vom Radius R'' gibt, der bei P ausserhalb C liegt.

Eine konstruktive Fassung der Definition 2 ist die

Definition 3: Es sei $\bar{R}$ die untere Grenze der Radien aller Kreise, die bei P ausserhalb C liegen, und $\underline{R}$ die obere Grenze der Radien aller Kreise die bei P innerhalb C liegen. Gilt

$$\bar{R} = \underline{R} \ , \tag{2}$$

so heisse dieser Wert der Krümmungsradius R von C im Punkte P.

Ist $\bar{R} \neq \underline{R}$, so könnte man $\bar{R}$ den äusseren und $\underline{R}$ den inneren Krümmungsradius von K nennen. $\bar{R}$ und $\underline{R}$ haben viele Eigenschaften, die R hat und existieren immer. Die Definitionen 2 und 3 kann man auch so formulieren, dass sie für beliebige orientierte ebene Kurven einen Sinn haben. Man braucht nur die Begriffe „bei P innerhalb C" und „bei P ausserhalb C" in naheliegender Weise durch „bei P links von C" und „bei P rechts von C" ersetzen.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Definitionen 1, 2, 3 untereinander äquivalent sind.

Äquivalenz der Definitionen 1 und 3: Wie schon bemerkt, kann man voraussetzen, dass es in P genau eine Stützgerade von C gibt. Angenommen (2) sei richtig. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es dann zwei durch P gehende Kreise $\bar{K}_\varepsilon$, $\underline{K}_\varepsilon$ mit den Radien $R + \varepsilon$, $R - \varepsilon$, derart dass für eine gewisse Umgebung U von P der Teilbogen $C_\varepsilon = C \cap U$ von C zwischen $\bar{K}$ und $\underline{K}$ liegt. (R bedeutet natürlich das durch (2) gegebene R.) Ist X ein beliebiger Punkt aus C_ε, so muss daher der Kreis, der durch P und X geht und C im Punkte P berührt, zwischen $\bar{K}$ und $\underline{K}$ liegen. Somit gilt für hinreichend nahe bei P liegendes X

$$R - \varepsilon \leqq R(P, X) \leqq R + \varepsilon \ .$$

Das bedeutet aber, dass (1) existiert und dass die durch Definition 1 und 3 gegebenen R in diesem Fall übereinstimmen.

Nun werde angenommen, dass (1) existiere. Es sei K der Kreis mit dem durch (1) gegebenen Radius R, der C in P berührt. Es soll zunächst gezeigt werden: Berührt ein Kreis $\bar{K}$ vom Radius $R + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) C im Punkte P, so liegt $\bar{K}$ bei P ausserhalb C. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von Punkten P_i ($i = 1, 2, \ldots$) mit $P_i \in C$, $\lim\limits_{i \to \infty} P_i = P$ und P_i ausserhalb $\bar{K}$. Für die Radien R (P, P_i) gälte daher

$$R = \lim_{X \to P} R(P, X) \geqq \varliminf_{i \to \infty} R(P, P_i) \geqq R + \varepsilon ,$$

was unmöglich ist. Genau so sieht man, dass die analog definierten Kreise K_ε vom Radius $R - \varepsilon$ bei P innerhalb C liegen. Zusammen mit der trivialen Ungleichung $\underline{R} \leqq \bar{R}$ erhält man demnach für jedes positive ε

$$R - \varepsilon \leqq \underline{R} \leqq \bar{R} \leqq R + \varepsilon ,$$

also $R = \underline{R} = \bar{R}$.

Äquivalenz der Definitionen 2 und 3: Dass das durch (2) oder (1) gegebene R die in Definition 2 genannte Eigenschaft hat, wurde soeben beim Beiweis, dass (2) aus (1) folgt, dargelegt. Liegt umgekehrt ein durch Definition 2 erklärtes R vor, so ist offenbar sowohl $R < \bar{R}$ wie auch $R > \underline{R}$ unmöglich. Also gilt

$$\bar{R} \leqq R \leqq \underline{R} ,$$

woraus wegen $\underline{R} \leqq \bar{R}$ folgt, dass $R = \bar{R} = \underline{R}$ ist.

LITERATUR

[1.] B. Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning. *Mat. Tidsskr. B.*, 50-62 (1929).