5. Technique du cas non homogène.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

à partir de rangs convenables; ξ, qu'on peut noter x_0, est en particulier équivalent à tous les x_n. Enfin la périodicité (à partir d'un certain rang) de la suite des a_n caractérise les irrationnels ξ quadratiques.

5. Technique du cas non homogène.

A la suite de méthodes analogues proposées par divers auteurs (notamment Morimoto), Cassels a utilisé pour le cas non homogène une suite de quadruplets d'entiers (u_n, v_n, u'_n, v'_n) qu'on peut encore appeler suite de meilleure approximation du couple (ξ, η) en ce sens que

$$c^+(\xi, \eta) = \inf\left[\lim_{n\to+\infty} v_n \left| v_n \xi - u_n - \eta \right|, \lim_{n\to+\infty} v'_n \left| v'_n \xi - u'_n - \eta \right|\right].$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus pour le développement de l'irrationnel ξ en fraction continue, et en posant

$$z_{n+1} = \frac{v_n \xi - u_n - \eta}{q_n \xi - p_n} \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n},$$

on obtient $c^+(\xi, \eta)$ par

$$c^+(\xi, \eta) = \inf\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{z_n t_n}{x_n - y_n}, \lim_{n\to+\infty} \frac{(\varkappa - z_n)(t_n - y_n)}{x_n - y_n}\right]$$

avec les formules de récurrence

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \qquad b_n = [x_n - z_n]$$

à moins que $b_{n-1} = a_{n-1}$, auquel cas ces formules de récurrence doivent être remplacées par

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n .$$

Ainsi $c^+(\xi, \eta)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un rang arbitraire, de la suite des couples d'entiers (a_n, b_n) (à l'exception des rangs n tels que $b_{n-1} = a_{n-1}$, pour lesquels b_n n'est pas défini); cette suite est le *développement du* *couple* (ξ, η) et rend des services analogues à ceux qu'on peut attendre du développement en fraction continue de ξ dans le cas homogène. En particulier, l'équivalence évoquée plus haut de deux couples (ξ, η), (ξ', η') se caractérise par l'identité de leurs développements à partir de rangs convenables; (ξ, η), qu'on peut noter (x_0, z_0) est ainsi équivalent à tous les couples (x_n, z_n). L'appartenance de ξ et η à un même corps quadratique est caractérisée par la périodicité du développement de (ξ, η), à partir d'un certain rang. L'éventualité du cas homogène $[\eta = q\,\xi + p$ avec p et q entiers$]$ se caractérise par $b_n = a_n - 1$ pour tout n assez grand.

Comme dans le cas homogène, les grandes valeurs de $c^+(\xi, \eta)$ $\left[\text{disons } c^+(\xi, \eta) \geqslant \frac{7}{20}\right]$ ne s'obtiennent que dans des circonstances relativement simples: pour tout n assez grand, b_n est toujours défini, et le couple (a_n, b_n) ne peut prendre que les quatre valeurs (1, 0), (2, 1), (3, 1) et (4, 2). Une étude minutieuse, mais élémentaire, de la distribution de ces valeurs dans le développement d'un couple (ξ, η) conduit aux résultats évoqués dans le paragraphe 3.

6. Applications.

Des méthodes algorithmiques très analogues aux précédentes permettent aussi un classement des valeurs de $c^+(\xi, \eta)$ ou de $c(\xi, \eta)$ lorsque ξ ou η restent fixes, l'autre élément du couple variant. C'est ainsi que Davenport et quelques-uns de ses élèves ont déterminé entre 1948 et 1952 les bornes supérieures de $c(\xi, \eta)$ lorsque η décrit l'ensemble des réels, ξ restant fixe et tel que $c(\xi)$ soit égal à l'une des premières valeurs trouvées par Markoff. En sens inverse, j'ai déterminé avec Poitou, en 1954 (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 82, pp. 197-299), en fonction de η la borne supérieure de $c(\xi, \eta)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, η restant fixe et égal à un rationnel quelconque et, dans les mêmes conditions, la borne supérieure de $c^+(\xi, \eta)$ lorsque η est un rationnel de dénominateur au plus égal à 10.

De même, Davenport, Prasad et Cassels ont obtenu en 1951 (cf. par exemple *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 48, pp. 72-86) les inégalités suivantes, qui améliorent des résultats antérieurs de