6. Applications.

couple (ξ, η) et rend des services analogues à ceux qu'on peut attendre du développement en fraction continue de ξ dans le cas homogène. En particulier, l'équivalence évoquée plus haut de deux couples (ξ, η), (ξ', η') se caractérise par l'identité de leurs développements à partir de rangs convenables; (ξ, η), qu'on peut noter (x_0, z_0) est ainsi équivalent à tous les couples (x_n, z_n). L'appartenance de ξ et η à un même corps quadratique est caractérisée par la périodicité du développement de (ξ, η), à partir d'un certain rang. L'éventualité du cas homogène [$\eta = q\,\xi + p$ avec p et q entiers] se caractérise par $b_n = a_n - 1$ pour tout n assez grand.

Comme dans le cas homogène, les grandes valeurs de $c^+(\xi, \eta)$ $\left[\text{disons } c^+(\xi, \eta) \geqslant \frac{7}{20}\right]$ ne s'obtiennent que dans des circonstances relativement simples: pour tout n assez grand, b_n est toujours défini, et le couple (a_n, b_n) ne peut prendre que les quatre valeurs (1, 0), (2, 1), (3, 1) et (4, 2). Une étude minutieuse, mais élémentaire, de la distribution de ces valeurs dans le développement d'un couple (ξ, η) conduit aux résultats évoqués dans le paragraphe 3.

6. Applications.

Des méthodes algorithmiques très analogues aux précédentes permettent aussi un classement des valeurs de $c^+(\xi, \eta)$ ou de $c(\xi, \eta)$ lorsque ξ ou η restent fixes, l'autre élément du couple variant. C'est ainsi que Davenport et quelques-uns de ses élèves ont déterminé entre 1948 et 1952 les bornes supérieures de $c(\xi, \eta)$ lorsque η décrit l'ensemble des réels, ξ restant fixe et tel que $c(\xi)$ soit égal à l'une des premières valeurs trouvées par Markoff. En sens inverse, j'ai déterminé avec Poitou, en 1954 (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 82, pp. 197-299), en fonction de η la borne supérieure de $c(\xi, \eta)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, η restant fixe et égal à un rationnel quelconque et, dans les mêmes conditions, la borne supérieure de $c^+(\xi, \eta)$ lorsque η est un rationnel de dénominateur au plus égal à 10.

De même, Davenport, Prasad et Cassels ont obtenu en 1951 (cf. par exemple *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 48, pp. 72-86) les inégalités suivantes, qui améliorent des résultats antérieurs de

Khintchine et Morimoto (1926-27):

$$\inf_{\xi}\left[\sup_{\eta} c^{+}(\xi, \eta)\right] > \frac{3}{32} \qquad \text{et} \qquad \inf_{\xi}\left[\sup_{\eta} c^{+}(\xi, \eta)\right] > \frac{1}{51}$$

où η décrit l'ensemble des réels, puis ξ l'ensemble des irrationnels. Les constantes numériques des seconds membres de ces inégalités ne sont d'ailleurs certainement pas les meilleures constantes possibles, qui demeurent inconnues à ce jour. En revanche, on peut, dans la dernière inégalité, remplacer $c(\xi, \eta)$ par

$$k(\xi, \eta) = \inf |v(v\xi - u - \eta)| \leq c(\xi, \eta)$$

où la borne inférieure est prise pour l'ensemble des couples d'entiers (u, v) tels que $v \neq 0$. Il revient donc au même d'énoncer le résultat suivant: si α, β, α', β' sont quatre nombres réels quelconques, il existe toujours deux nombres réels η et η' tels que

$$|(\alpha u + \beta v - \eta)(\alpha' u + \beta' v - \eta')| > \frac{|\alpha\beta' - \alpha'\beta|}{51}$$

pour tous les couples d'entiers u, v. De plus, on peut prouver que si α' et β' sont les conjugués de α et β dans un corps quadratique, il est possible de choisir pour η et η' des nombres de la forme

$$\eta = \alpha r + \beta s \qquad \eta' = \alpha' r + \beta' s$$

où r et s sont rationnels.

L'intérêt de ce dernier raffinement est le suivant: en choisissant pour (α, β) une base $(1, \omega)$ des entiers d'un corps quadratique réel K, l'hypothèse que K possède un algorithme d'Euclide se traduit par l'existence, pour tout couple de rationnels r, s, d'au moins un couple d'entiers ordinaires u, v tels que la valeur absolue de la norme de $u + \omega v - (r + \omega s)$ dans K soit inférieure à 1, ce qui s'écrit:

$$|u + \omega v - (r + \omega s)|\,|u + \omega' v - (r + \omega' s)| < 1 .$$

D'après ce qui précède, cette circonstance ne peut pas se réaliser si le discriminant D du corps K vérifie l'inégalité

$$(\omega - \omega')^2 = \mathrm{D} \geqslant 51^2 .$$

Il n'existe donc qu'un nombre fini de corps quadratiques réels euclidiens. Une étude beaucoup plus détaillée, due à de nombreux auteurs et achevée en 1952, a permis d'en dresser la liste: ce sont les corps engendrés respectivement par les racines carrées des entiers suivants: 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57 et 73.

Professeur R. Descombes,
Institut de Mathématiques,
Université de Lille.