1,3. Exécution des calculs.

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable $\mathfrak{f}^\star \mathfrak{b}$, l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star \mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} &= \mathbf{E}\,[\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}]\,[\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\,(\mathfrak{m}^\star \tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{\mathfrak{x}}^\star \mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\,(\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star)\,\mathfrak{m}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}_P\,(\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} \begin{Vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^2 & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{x}}_n\,\tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathbf{x}}_n^2 \end{Vmatrix}$$

$$= \mathfrak{I}_n\,\sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star \mathfrak{m})\,\sigma^2\,.$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\,,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{l}_f = 0\,;$$

on a

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{m}_0)\,\sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 = \operatorname{var} \mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice $\mathfrak{A}$ (plus explicitement: $\mathfrak{A}_{P,H}$).

Il en résulte immédiatement que l'espace des estimatrices est engendré par les lignes de la matrice $\mathfrak{A}^T$, donc

toute estimatrice est de la forme $\mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x}$.

Comme $\mathbf{E}\, \mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{A}^T \, \mathbf{E}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$, cet énoncé, à son tour, entraîne celui-ci:

toute combinaison estimable est de la forme $\mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$ *et réciproquement.*

Ainsi la correspondance biunivoque entre estimatrices et combinaisons estimables est clairement mise en évidence:

a) si $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est estimable, il existe nécessairement un vecteur $\mathfrak{m}_f^T \in \mathbf{B}^\star$ tel que $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A}$;

b) l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est alors $\mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x}$ (de sorte que $\mathfrak{l}_f^\star = \mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T$);

c) la variance de cet estimateur vaut $[\mathfrak{m}^T \, (\mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A})\, \mathfrak{m}]\, \sigma^2$.

1, 33. Supposons que $r = p$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^T$, et $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ sont alors des matrices de rang p, et le système de dimension p en l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$

$$\mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x} \tag{6}$$

détermine entièrement cette inconnue. Celle-ci jouit de la précieuse propriété que voici:

l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ *n'est autre que* $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$.

En effet, soit $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A}$; on a

$$\mathfrak{l}_f^\star \, \mathfrak{x} = \mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}_f^T \, \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A})\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{f}^T \, \hat{\mathfrak{b}}_H , \quad \text{q.e.d.}$$

1, 34. Si $r < p$, le système (6) ne détermine pas univoquement l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$. Pourtant, il reste vrai que, quelle que soit la détermination choisie pour $\hat{\mathfrak{b}}_H$, l'estimateur privilégié de la combinaison estimable $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$; en d'autres termes, les premiers membres de (6) mettent en évidence r combinaisons estimables particulières qui constituent une base de $\mathbf{B}_+$.

Le système (6) est dit « système normal »; il faut évidemment se garder d'y vouloir introduire l'inverse de $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ lorsque $r < p$ (cfr. § 3).