2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux compo santes, et on peut énoncer que

si $\mathsf{U}^\star$ *est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux* $\mathsf{U}_1^\star, \ldots, \mathsf{U}_t^\star$, *on a*

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^t \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_i^\star \ .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base $\mathfrak{u}_1^\star, \ldots, \mathfrak{u}_s^\star$ de $\mathsf{U}^\star$; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale $\mathfrak{w}_1^\star, \ldots, \mathfrak{w}_s^\star$; alors on a

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^s \mathbf{SC}\{\,\mathfrak{w}_i^\star\,\}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^s (\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{x})^2/(\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{w}_i) \ . \tag{11}$$

2, 14. On écrit, en particulier,

SCT (somme de carrés totale) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}^\star$,
SCN (somme de carrés normale) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}_+$,
SCE (somme de carrés des erreurs) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}_0$.

On notera que, V_+ et V_0 étant par définition complémentaires et orthogonaux dans $\mathsf{V}^\star$, on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} \ .$$

D'autre part, $\mathfrak{e}_1^\star, \ldots, \mathfrak{e}_n^\star$ forment une base orthogonale de $\mathsf{U}^\star$, et $\mathfrak{e}_i^\star\,\mathfrak{x} = \mathbf{x}_i$; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 \ .$$

2, 2. *Distributions. Epreuves d'hypothèses.*

2, 21. Soit $\mathsf{U}^\star$ un sous-espace de $\mathsf{V}^\star$, de dimension s, $\mathfrak{w}_1^\star, \ldots, \mathfrak{w}_s^\star$ une base orthogonale de $\mathsf{U}^\star$. Chaque $\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{x}$ est une variable aléatoire normale, de moyenne $\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{A} \mathfrak{b}$ et de variance $(\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{w}_i)\, \sigma^2$; en outre, si $i \neq k$,

$$\operatorname{cov}(\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x}, \mathfrak{w}_k^\star \mathfrak{x}) = (\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{w}_k)\, \sigma^2 = 0 \ ,$$

de sorte que les aléatoires $\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x}$ sont les composantes non corrélées d'un vecteur multinormal, elles sont donc indépendantes.

Dès lors, **si l'on suppose** que $\mathfrak{b}$ est tel que $\mathbf{E}\, \mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x} = 0$ $(i = 1, ..., s)$ (c'est-à-dire sous l'hypothèse $\mathfrak{w}_1^\star \mathfrak{A} \mathfrak{b} = ...\ \mathfrak{w}_s^\star \mathfrak{A} \mathfrak{b} = 0$), les aléatoires $(\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x})/\sigma$ sont gaussiennes et indépendantes, de sorte que

$$(1/\sigma^2)\ \mathbf{SC}\,\mathbf{U}^\star = \sum_1^s [(\mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x})/\sigma]^2$$

est une aléatoire χ_s^2.

Si, par contre, on ne suppose pas $\mathbf{E}\, \mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x} = 0$, $(1/\sigma^2)\ \mathbf{SC}\,\mathbf{U}^\star$ est une aléatoire χ^2 décentrée à s degrés de liberté, elle est donc, en loi, plus grande qu'une aléatoire χ_s^2:

$$\mathbf{Pr}\,[(\mathbf{SC}\,\mathbf{U}^\star)/\sigma^2 > a] \geqslant \mathbf{Pr}\left[\chi_s^2 > a\right] .$$

2, 22. Prenons pour $\mathbf{U}^\star$ l'espace des erreurs, $\mathbf{V}_0$; alors $s = n - r$ et les conditions $\mathbf{E}\, \mathfrak{w}_i^\star \mathfrak{x} = 0$ sont identiquement [9]) satisfaites. On a donc, *indépendamment de toute hypothèse quant à* $\mathfrak{b}$,

$$\mathbf{Pr}\,[\mathbf{SC}\,\mathrm{E} > a\,\sigma^2] = \mathbf{Pr}\left[\chi_{n-r}^2 > a\right] ,$$

d'où, notamment,

$$\mathbf{Pr}\,[\mathbf{SC}\,\mathrm{E}/a < \sigma^2 < \mathbf{SC}\,\mathrm{E}/b] = \mathbf{Pr}\left[a < \chi_{n-r}^2 < b\right] ,$$

ce qui permet d'estimer σ.

2, 23. Supposons que $\mathfrak{f}^\star \mathfrak{b} = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H$ soit une combinaison estimable et que $\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} \equiv \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$ soit son estimateur privilégié. Alors:

a) **sous l'hypothèse** $\mathfrak{f}^\star \mathfrak{b} = a$, $\left[(\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} - a)/\sigma \sqrt{(\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{l}_f)}\right]$ est une aléatoire gaussienne;

b) $\mathbf{SC}\,\mathrm{E}/(n - r)\,\sigma^2$ est une aléatoire χ_{n-r}^2 ;

c) $\mathbf{SC}\,\mathrm{E}$ et $\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x}$ sont indépendantes (car $\mathfrak{l}_f^\star$, estimatrice, est orthogonale à tous les vecteurs de $\mathbf{V}_0$).

Donc, sous l'hypothèse susdite,

$$\Delta_a = \frac{\mathfrak{l}_f^\star \, \mathfrak{x} - a}{\sigma \sqrt{(\mathfrak{l}_f^\star \, \mathfrak{l}_f)}} : \frac{\sqrt{\mathbf{SC}\,\mathrm{E}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(\mathfrak{l}_f^\star \, \mathfrak{x} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(\mathfrak{l}_f^\star \, \mathfrak{l}_f) \, \mathbf{SC}\,\mathrm{E}]}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-r}$, ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer $\mathfrak{f}^\star \, \mathfrak{b}$.

2, 24. Soient $\mathfrak{f}_1^\star \, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{f}_s^\star \, \mathfrak{b}$ des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et $\mathfrak{l}_{f_i}^\star \, \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, s)$ leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse** $\mathfrak{f}_1^\star \, \mathfrak{b} = \ldots = \mathfrak{f}_s^\star \, \mathfrak{b} = 0$, les moyennes des $\mathfrak{l}_{f_i}^\star \, \mathfrak{x}$ sont toutes nulles, et donc $(1/\sigma^2)$ $\mathbf{SC}\{\mathfrak{l}_{f_1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_{f_s}^\star\}$ est une aléatoire χ_s^2; cela entraîne que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{SC}\{\mathfrak{l}_{f_1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_{f_s}^\star\}/s}{\mathbf{SC}\,\mathrm{E}/(n-r)}$$

est une aléatoire $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$. Si l'hypothèse en question est fausse, $\mathbf{Q}$ est, en loi, plus grande que $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$, les grandes valeurs de $\mathbf{Q}$ étant critiques.

Remarque. — Il est manifeste que, si α est un nombre certain quelconque, on a $\mathbf{SC}\{\alpha \mathfrak{w}^\star\} = \mathbf{SC}\{\mathfrak{w}^\star\}$. On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression Δ_a du § 2, 33.

2, 3. *Sous-espaces disjoints non orthogonaux.*

2, 31. Soient $\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathsf{U}_{r-q}^\star$ deux sous-espaces complémentaires de V_+, de dimensions q et $r - q$: $\mathsf{V}_+ = \mathsf{U}_q^\star \oplus \mathsf{U}_{r-q}^\star$; on ne suppose pas que $\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathsf{U}_{r-q}^\star$ sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}_{r-q}^\star$. Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{U}_{r-q}^\star) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{x} = 0 \,, \tag{11}$$

tandis que $(\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{U}_q^\star)$ implique $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star \, \mathfrak{x} \neq 0$ pour une valeur au moins de $\mathfrak{b}$.

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit $\mathfrak{l}_1^\star, \ldots, \mathfrak{l}_q^\star$ une base de $\mathsf{U}_q^\star$, $\mathfrak{l}_{q+1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_r^\star$ une base de $\mathsf{U}_{r-q}^\star$, et $\mathfrak{W}$ telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{W}\left[\mathfrak{l}_1^\star \, \mathfrak{x} \ldots, \mathfrak{l}_r^\star \, \mathfrak{x}\right]^T, \qquad \mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{W}^{-1}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{W}^{-1}\,\mathfrak{w} \;;$$