

## 5. Congruence fondamentale (module premier).

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 5. Congruence fondamentale (module premier).

L'arithmétique d'un corps quadratique  $\mathbf{R}(\theta)$  est intimement liée à l'étude de son polynôme fondamental, considéré dans l'anneau des nombres entiers, définis à un module entier  $m$  près, —ou des classes d'entiers, mod.  $m$ —. C'est cette étude que précisent les définitions et les propriétés suivantes.

DÉFINITIONS. — On appellera **congruence fondamentale**, mod.  $m$ , de  $\mathbf{R}(\theta)$ , l'équation congruentielle, obtenue en écrivant que le polynôme fondamental du corps  $F(x)$ , est *congru* à 0, mod.  $m$ :

$$x^2 - Sx + N \equiv 0, \quad (\text{mod. } m).$$

L'étude de cette équation en  $x$ , consiste à chercher les valeurs entières  $c$ , de la variable  $x$ , telles que  $F(c)$ , qui est un nombre entier, soit divisible par  $m$ . S'il en existe, elles se répartissent en progressions arithmétiques, de raison  $m$ , doublement illimitées:

$$c + \lambda m; \quad \lambda \text{ nombre entier quelconque.}$$

En effet l'égalité:

$$F(c + \lambda m) = F(c) + m \times (\text{un nombre entier}),$$

montre que tous les nombres entiers  $F(c + \lambda m)$  sont divisibles par  $m$ , s'il en est ainsi de l'un d'eux.

Une telle progression,  $c + \lambda m$ , est couramment appelée une *classe d'entiers, mod.  $m$*  —ou un *entier défini, mod.  $m$* —.

On appellera **zéro, mod.  $m$** , de  $F(x)$  —ou *solution* de la congruence fondamentale— indifféremment: *une progression  $c + \lambda m$* , dont chaque terme donne à  $F(x)$  une valeur  $F(c + \lambda m)$  divisible par  $m$ ; ou *un seul des termes* de cette progression, choisi arbitrairement, ou précisé par une condition convenable.

On peut d'abord établir une propriété générale, valable pour tout module  $m$ .

THÉORÈME des zéros conjugués. — Les solutions de la congruence fondamentale, s'il en existe, forment *un, ou plusieurs*,

*couples de zéros mod.  $m$ , de  $F(x)$ . Les deux zéros d'un couple ont une somme congrue à  $S$ , mod.  $m$ :*

$$c = c_0 + \lambda m, \quad c' = c'_0 + \lambda' m; \quad c + c' \equiv S, \quad (\text{mod. } m);$$

ils sont appelés **conjugués** et désignés par une même lettre avec et sans accent (comme les éléments conjugués du corps).

*Deux zéros conjugués sont égaux si et seulement si  $m$  est diviseur du discriminant  $D$ ; leur valeur commune est alors appelée **zéro double**.*

L'existence d'un zéro  $c$  entraîne celle de son conjugué  $c'$ , car, d'après les calculs évidents de congruences, mod.  $m$ :

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} c + c' \equiv S, \\ c^2 - Sc + N \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c \times c' \equiv c \times (S - c) \equiv N \\ F(x) \equiv (x - c) \times (x - c') \end{array} \right. \quad (\text{mod. } m)$$

En outre la congruence:

$$(c - c')^2 \equiv S^2 - 4N = D, \quad (\text{mod. } m),$$

montre que les deux zéros sont congrus —ou les deux progressions sont égales—, si et seulement si  $D$  est congru à 0, mod.  $m$ .

Pour qu'un zéro soit double il faut et il suffit qu'il annule, mod.  $m$ , le polynôme dérivé:

$$\text{car: } \begin{array}{l} \dot{F}(x) = 2x - S; \\ c \equiv c' \Leftrightarrow 2c \equiv S, \quad (\text{mod. } m). \end{array}$$

On peut remarquer que ces calculs de congruences peuvent, aussi bien, être considérés comme des calculs [d'addition, soustraction et multiplication] entre les  $m$  classes d'entiers, mod.  $m$ :

$$0 + \lambda m, 1 + \lambda m, \dots, (m - 1) + \lambda m,$$

qui constituent un *anneau commutatif avec unité* —ou au sens restreint— .

**THÉORÈME** de la congruence fondamentale pour un module premier. — Lorsque le module de la congruence fondamentale est un nombre premier  $p$ ,

1. Si  $p$  ne divise pas le discriminant  $D$ :  
ou bien la congruence est impossible;

ou bien elle a un et un seul couple de solutions inégales —ou  $F(x)$  a un et un seul couple de zéros conjugués incongrus— ;

2. Si  $p$  est diviseur de  $D$  (notamment si  $p = 1$ ), la congruence a deux solutions confondues —ou  $F(x)$  a un et un seul zéro double— .

La première partie du théorème peut être complétée par des propriétés caractéristiques de possibilité:

pour un module premier  $p$  impair, ne divisant pas le discriminant  $D$ , la congruence fondamentale est possible, si, et seulement si, il existe un entier, dont le carré soit congru à  $D$ , mod.  $p$ . On exprime parfois cette existence en disant que  $D$  est **résidu quadratique** du nombre premier  $p$ .

pour le module premier 2, si le discriminant est impair, le polynôme fondamental est de la forme:

$$F(x) = x^2 + x + N; \quad [S = -1; \quad D = 1 - 4N];$$

la congruence fondamentale est possible si, et seulement si,  $N$  est pair. Les deux zéros conjugués de  $F(x)$  sont 0 et 1, (mod. 2).

1. Lorsque  $m$  est égal à un nombre premier  $p$ , pair ou impair, si la congruence est possible, le polynôme  $F(x)$  a, au moins, un couple de zéros (conjugués),  $c$  et  $c'$ , peut être égaux, et il est congru à un produit de binômes. Il n'a pas alors d'autre zéro, car la congruence

$$(x-c) \times (x-c') \equiv 0, \quad (\text{mod. } p),$$

exige que l'un au moins des facteurs soit divisible par  $p$ , c'est-à-dire que  $x$  soit congru à  $c$  ou à  $c'$ .

On peut exprimer ce raisonnement en disant que l'anneau des  $p$  classes d'entiers, mod.  $p$ , est un **domaine d'intégrité**, c'est-à-dire qu'un produit de deux facteurs ne peut être nul, que s'il en est ainsi de (au moins) l'un des facteurs. [C'est même un **corps**, car tout élément non nul, y possède un inverse.]

Pour un module  $p$ , premier impair, on peut utiliser le produit du polynôme  $F(x)$  par 4:

$$4F(x) = (2x - S)^2 - D;$$

l'existence d'un zéro est équivalente à celle d'un nombre entier  $(2c-S)$ , dont le carré est congru à  $D$ , mod.  $p$ .

Pour le *module premier*  $p = 2$ , il n'y a que deux classes d'entiers, représentés respectivement par 0 et 1; il suffit de former les valeurs qu'elles donnent à  $F(x) = x^2 + x + N$ :

$$F(0) \equiv F(1) \equiv N, \quad (\text{mod. } 2);$$

d'où la condition d'existence.

2. Pour un *module premier impair*  $p$ , *diviseur de*  $D$ , l'expression de  $4F(x)$  est congrue à:

$$4F(x) = (2x-S)^2 - D \equiv (2x-S)^2, \quad (\text{mod. } p);$$

elle montre qu'il existe un et un seul zéro  $c$ , mod.  $p$ , qui rend  $(2c-S)$  divisible par  $p$ . Suivant le cas, il est congru à:

$$c \equiv 0, \quad \text{si } S = 0; \quad c \equiv \frac{p-1}{2}, \quad \text{si } S = -1.$$

Pour le *module* 2, lorsque  $D$  est pair,  $S$  est nul, la congruence:

$$x^2 + N \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2)$$

a une et une seule solution (zéro double), congrue à:

$$0, \quad \text{si } N \text{ est pair}; \quad 1, \quad \text{si } N \text{ est impair.}$$

Pour  $p = 1$ , la propriété est triviale, il n'y a qu'une seule classe, formée de tous les nombres entiers et elle est zéro double de  $F(x)$ .

## 6. Congruence fondamentale (module composé).

On considère d'abord un *module primaire* —ou puissance d'un nombre premier  $> 1$ —.

THÉORÈME de la congruence fondamentale pour un module primaire. Relativement à un *module*  $p^h$ , puissance (d'exposant  $h$ , entier positif), d'un nombre premier  $p$ , différent de 1, le polynôme fondamental  $F(x)$ :