# 8. Idéaux fractionnaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

## 8. Idéaux fractionnaires.

### 8. 1. *Définition constructive.*

Les *idéaux fractionnaires* —ou, plus simplement, les idéaux— d'un corps quadratique, peuvent être construits au moyen des idéaux canoniques, dont ils sont, par ailleurs, une généralisation.

Définition. — Dans un corps $\mathbf{R}(\theta)$, un **idéal fractionnaire I**, *non nul*, peut être défini par:

*un nombre rationnel positif* $q$, appelé son **facteur rationnel**;
*un idéal canonique* $\mathbf{M} = (m, \theta—c)$, appelé son **facteur canonique**.

L'idéal ainsi défini **I** est l'*ensemble des éléments* $\rho$, de $\mathbf{R}(\theta)$, obtenus en multipliant par le facteur rationnel $q$ les éléments du facteur canonique **M**:

$$\rho = q \times \xi; \qquad \xi = x \times m + y \times (\theta—c); \qquad x,y \text{ nombres entiers.}$$

La génération des éléments peut être exprimée directement par les valeurs d'une forme, dont les valeurs des variables —ou les multiplicateurs— sont des nombres entiers:

$$\rho = \|x\ y\| \times \left\| \begin{matrix} q \times m \\ \\ q \times (\theta—c) \end{matrix} \right\| \qquad \text{ou} \qquad \|x'\ y\| \times \left\| \begin{matrix} q \times m \\ \\ —q \times (\theta'—c') \end{matrix} \right\|.$$

Les nombres entiers $c$ et $c'$ sont des termes de deux progressions arithmétiques, de raison $m$, de somme congrue à $S$. Les couples d'éléments générateurs $q \times m$, $q \times (\theta—c)$ sont encore appelés les **bases canoniques**, de l'idéal **I**, qui sera lui-même désigné par l'une des expressions, appelée sa **forme canonique**:

$$\mathbf{I} = q \times \mathbf{M}, \qquad \text{ou} \quad q \times (m, \theta—c), \qquad \text{ou} \quad q \times (m, \theta'—c').$$

Les nombres entiers $x,y$, qui sont déterminés pour chaque élément $\xi$ de **M**, le sont aussi pour chaque élément $\rho = q \times \xi$, de **I**, car:

$$q \times \xi_1 = q \times \xi_2 \quad \Leftrightarrow \quad q \times (\xi_1 — \xi_2) = o \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 = \xi_2.$$

Ils seront encore appelés les *coordonnées* de l'élément $\rho$, relativement à la base canonique de **I**.

Un idéal canonique est, à fortiori, un idéal fractionnaire; il est égal à son facteur canonique; son facteur rationnel est $+1$ —ou il n'a pas de facteur rationnel « proprement dit » (différent de 1)— .

On appelle encore **idéal nul**, le sous-ensemble de $\mathbf{R}(\theta)$ constitué par *le seul élément nul*; il peut être considéré comme défini par un *facteur rationnel égal à* 0 et un *facteur canonique arbitraire.*

Définition. — La **norme** d'un idéal fractionnaire est (le nombre rationnel positif égal à) *le produit du carré du facteur rationnel par la norme du facteur canonique*:

$$\text{Norme de } [q\times(m,\ \theta-c)] = q^2\times m.$$

Cette définition sera justifiée ci-dessous (**13**); elle comprend le cas d'un idéal canonique, pour lequel $q = 1$; elle s'étend à l'*idéal nul*, qui est le seul dont la norme soit nulle.

Dans un idéal fractionnaire **I**, non nul, ainsi construit et considéré comme un ensemble d'éléments $\rho = r+s\theta$, du corps $\mathbf{R}(\theta)$, on peut caractériser les termes de sa forme canonique, ainsi qu'il a été fait pour un idéal canonique (**7**).

Le *facteur rationnel*, d'un idéal **I**, *est égal au minimum*, effectivement atteint, *des valeurs absolues* $|s|$, des deuxièmes coordonnées —ou multiplicateurs de $\theta$— des éléments [non rationnels] de **I**, (pour lesquels ces coordonnées $s$ ne sont pas nulles). C'est aussi *le plus petit des facteurs rationnels* (**3**), des éléments non nuls de **I**.

*Le facteur canonique est l'ensemble des quotients* $\rho\times q^{-1}$, des éléments $\rho$, de **I**, par son facteur rationnel $q$. Ce sont des entiers du corps, qui constituent un idéal *canonique.*

Les expressions des éléments de **I** sont:

$$\rho = x\times(qm)+y\times[q\times(\theta-c)] = (x\times qm-y\times qc)+(y\times q)\theta.$$

Les multiplicateurs de $\theta$ sont $s = y\times q$, le minimum des valeurs absolues $|y\times q| = |y|\times q$, de ceux qui ne sont pas nuls, est manifestement $q$, et il est atteint pour tous les éléments où $y = 1$.

Le facteur rationnel de tout élément $\rho = q\times\xi$ est multiple de $q$ (égal à son produit par le facteur rationnel de $\xi$), le plus petit est effectivement égal à $q$, puisqu'il est notamment celui de $q\times(\theta-c)$.

Les quotients $\rho \times q^{-1} = \xi$ sont les éléments du facteur canonique **M**.

**8. 2.** *Définition axiomatique d'un idéal fractionnaire.*

On peut encore caractériser un idéal fractionnaire par des conditions d'appartenance, ainsi qu'il a été fait pour un idéal canonique.

Théorème caractéristique d'un idéal fractionnaire. — *Pour qu'un ensemble* **I**, d'éléments du corps $\mathbf{R}(\theta)$, *soit un idéal fractionnaire, il faut et il suffit que:*

1. *Il contienne les différences*, donc aussi les sommes, *mutuelles de ses éléments* —ou soit un *module*— ;

2. *Les facteurs rationnels*, de ses éléments non nuls (**3**), *soient limités inférieurement*;

3. *Il contienne tout produit de chacun de ses éléments par tout entier du corps* (mais non plus tout produit mutuel).

Les conditions 1 et 3 sont aussi celles qui ont été indiquées pour un idéal canonique (**7**); toutefois elles s'appliquent ici à des éléments qui ne sont plus nécessairement des entiers du corps.

La condition 2 pourrait être remplacée par la condition, plus restrictive, que les dénominateurs des facteurs rationnels, non nuls (mis sous forme irréductible), soient limités supérieurement et, par suite, en nombre fini. La condition 2 en résulterait évidemment; en outre on pourrait affirmer l'existence d'un nombre entier $\varpi$ (notamment le p.p.c.m. de ces dénominateurs) tel que tous les produits $\varpi \times \rho$ soient des entiers du corps (en abrégé $\varpi \times \mathbf{I} \subset \mathbf{E}(\theta)$).

Les conditions sont *nécessaires*: les appartenances 1 et 3, vérifiées par les éléments (entiers du corps) du facteur canonique **M**, le sont aussi, évidemment, par leurs produits par le facteur rationnel $q$.

D'autre part, les facteurs rationnels des éléments de **I** sont des *multiples* de $q$, les valeurs absolues de ceux qui ne sont pas nuls sont donc au moins égales à $q$.

Les conditions sont *suffisantes*: elles sont vérifiées par le *sous ensemble de* $\mathbf{R}(\theta)$, réduit au seul élément nul, qui, par définition est un idéal (trivial).

Si elles sont vérifiées par un ensemble **I**, qui contient des éléments non nuls, on peut d'abord construire le facteur $q$, en utilisant la détermination qui en a été donnée, en appliquant un raisonnement arithmétique, analogue à celui qui a été employé pour la norme d'un idéal canonique.

L'ensemble $\{s\}$ des coefficients $s$, de $\theta$, dans les éléments $\rho$, de l'ensemble **I**, contient des éléments non nuls, car s'il existe dans **I** un élément rationnel $r$, non nul, il existe aussi l'élément $r\theta$, qui est son produit par l'entier (du corps) $\theta$ (condition 3). Cet ensemble contient les opposés de ses termes, $+s$ et $-s$, et leurs sommes —et différences— mutuelles; car la différence $s_1 - s_2$ des coefficients de $\theta$ dans deux éléments $\rho_1$ et $\rho_2$, de **I**, est le coefficient de $\theta$, dans la différence $\rho_1 - \rho_2$, qui appartient aussi à **I**, d'après la condition 1.

On peut se borner à considérer les coefficients $s$ positifs; ils sont limités inférieurement, puisqu'ils sont multiples des facteurs rationnels, eux-mêmes limités, d'après la condition 2. Ils ont une *limite inférieure* $q$; elle est effectivement atteinte, si non son voisinage contiendrait une infinité d'éléments de $\{s\}$ dont les différences mutuelles, appartenant aussi à $\{s\}$, seraient infiniment petites.

On peut alors constater que l'*ensemble* $\{s\}$ *est égal à l'ensemble des multiples* de $q$ —ou des produits $x \times q$, par les nombres entiers $x$— .

D'une part ces multiples, construits par additions et soustractions au moyen de $q$, qui est élément de $\{s\}$ appartiennent à cet ensemble.

D'autre part tout élément $s$, de $\{s\}$, est de cette forme, car en lui retranchant le plus grand multiple de $q$, qui lui est au plus égal, on obtient la différence:

$$s' = s - q \times x; \qquad 0 \leqslant s' < q; \qquad x \text{ nombre entier;}$$

elle appartient à $\{s\}$, ainsi que $s$ et $x \times q$, et elle ne peut être que nulle puisqu'elle est inférieure à $q$ et non négative.

On peut ensuite vérifier que, dans tout élément $\rho = r + s\theta$, de **I**, la coordonnée $r$, ou multiplicateur de 1, est aussi multiple de $q$. Il suffit de constater qu'il est égal au coefficient de $\theta$, dans un autre élément de **I**, qui peut être construit en multipliant $\rho$ par un entier du corps, ce qui est notamment le cas pour le produit:

$$(r + s\theta) \times (\theta - S) = -(Sr + Ns) + r\theta = r_1 + r\theta; \qquad (r_1 \text{ rationnel}).$$

Tout élément $\rho$, de **I**, ayant ainsi des coordonnées multiples de $q$ est, lui-même, égal au produit de $q$ par un entier du corps:

$$\rho = r+s\theta = \rho\times\xi; \qquad \xi = x'+y'\theta; \qquad x',y' \text{ nombres entiers.}$$

L'ensemble **M**, de ces entiers $\xi$, est un *idéal canonique*, car il vérifie les conditions de la définition axiomatique:

1 et 3 puisque:

$$\rho_1,\rho_2 \in \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \rho_1-\rho_2 \in \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad [(\rho_1\times q^{-1})-(\rho_2\times q^{-1})] \in \mathbf{M};$$
$$\alpha \in \mathbf{E}(\theta) \text{ et } \rho \in \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \alpha\times\rho \in \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad [\alpha\times(\rho\times q^{-1})] \in \mathbf{M}.$$

2, puisque, d'après la construction de $q$, il existe dans **I**, un élément $\rho_0$, dont il est le coefficient de $\theta$, de sorte que:

$$\rho_0\times q^{-1} = (r_0+q\theta)\times q^{-1} = \theta-c; \qquad c = -r_0\times q^{-1} \text{ entier rationnel.}$$

L'ensemble **I** est donc égal à un idéal, défini par sa forme canonique

$$\mathbf{I} = q\times\mathbf{M}; \qquad \begin{cases} q \text{ nombre rationnel positif;} \\ \mathbf{M} \text{ idéal canonique.} \end{cases}$$

**8. 3.** *Idéaux entiers.*

Définition. — *Un idéal fractionnaire* **I**, d'un corps $\mathbf{R}(\theta)$, *est appelé* **idéal entier**, *lorsque son facteur rationnel $q$ est un nombre entier*; [en particulier si $q = 1$, c'est-à-dire si **I** est un *idéal canonique*].

Il est équivalent de dire que *tous les éléments*, de l'idéal **I**, *sont des entiers*, du corps (**3**) —ou que **I** est contenu dans l'ensemble $\mathbf{E}(\theta)$, des entiers de $\mathbf{R}(\theta)$, dont on a dit qu'il était un idéal trivial— .

La deuxième propriété est *nécessaire*: les produits par un nombre entier $q$, des entiers (algébriques) du facteur canonique **M** sont des entiers du corps.

Elle est *suffisante*: si l'idéal **I** ne contient que des entiers du corps, leurs facteurs rationnels et le plus petit d'entre eux sont des nombres entiers.

L'idéal trivial $\mathbf{E}(\theta)$ est ainsi l'idéal *maximum*, aussi bien des idéaux canoniques, que des idéaux entiers, en ce sens qu'il en est un et qu'il les contient tous. Il est appelé l'**idéal unité**; qualificatif qui sera, à nouveau justifié ci-dessous (**12**).

On peut aussi donner une définition axiomatique d'un *idéal entier* par des conditions directes d'appartenance à un sous ensemble du domaine des entiers $\mathbf{E}(\theta)$:

pour qu'un ensemble $\mathbf{I}$, d'*entiers* du corps $\mathbf{R}(\theta)$, soit un idéal (nécessairement *entier*) il faut et il suffit qu'*il vérifie les conditions* 1 (module) *et* 3 (produit par tout entier du corps), des propriétés caractéristiques des idéaux (canonique, **7**, ou fractionnaire, **8**).

**8. 4.** *Multiplication d'un idéal par un élément.*

De la définition axiomatique d'un idéal fractionnaire, on peut déduire immédiatement des propriétés qui seront reprises ci-dessous comme cas particuliers de la multiplication des idéaux (**13**).

*L'ensemble* $\mathbf{J}$, *des produits*, des éléments d'un idéal fractionnaire $\mathbf{I}$, *par un élément* $\rho$, du corps, est *encore un idéal.* Cette propriété peut être exprimée par les relations réciproques; si $\rho$ n'est pas nul:

$$\mathbf{J} = \rho\times\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \rho^{-1}\times\mathbf{J}; \qquad \mathbf{I}, \mathbf{J} \text{ idéaux.}$$

La forme canonique d'un idéal $\mathbf{I}$ et la construction de son facteur canonique $\mathbf{M}$, en sont des cas particuliers:

$$\mathbf{I} = q\times\mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M} = q^{-1}\times\mathbf{I}; \qquad q \text{ facteur rationnel de } \mathbf{I}.$$

On peut en remarquer divers cas particuliers:

Si $\rho$ est un élément rationnel $q'$, non nul, les idéaux $\mathbf{I}$ et $q'\times\mathbf{I}$ ont le même facteur canonique:

$$\mathbf{I} = q\times\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad q'\times\mathbf{I} = (q\times|q'|)\times\mathbf{M}.$$

Le cas de $\rho = 0$ est trivial: $\quad 0\times\mathbf{I} = 0.$

Si $\rho$ est un entier $\alpha$, du corps, *l'idéal* $\alpha\times\mathbf{I}$ *est contenu dans* $\mathbf{I}$, car tout produit $\alpha\times$élément de $\mathbf{I}$, appartient à $\mathbf{I}$ (condition 3).

Si $\rho$ est un diviseur de l'unité $\eta$, l'idéal $\eta\times\mathbf{I}$ est égal à $\mathbf{I}$, car:

$$\eta^{-1}\times(\eta\times\mathbf{I}) = (\eta^{-1}\times\eta)\times\mathbf{I} = \mathbf{I},$$

est contenu dans $\eta\times\mathbf{I}$, qui lui-même contient $\mathbf{I}$, de sorte qu'ils sont égaux.

**8. 5.** *Idéaux conjugués.*

Les définitions (constructive et axiomatique) de la conjugaison des idéaux canoniques s'étendent évidemment aux idéaux fractionnaires.

DÉFINITION. — *Deux idéaux fractionnaires sont appelés* **conjugués**, et sont désignés par une même lettre, avec et sans accent $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$, lorsqu'ils ont des *facteurs rationnels égaux* et des *facteurs canoniques conjugués*:

$$\mathbf{I} = q\times\mathbf{M} = q\times(m,\ \theta - c); \qquad \mathbf{I}' = q\times\mathbf{M}' = q\times(m,\ \theta' - c).$$

Ils ont par suite des *bases canoniques conjuguées* (**2**).

Il est équivalent de dire (définition axiomatique) que *deux idéaux* (fractionnaires) *conjugués* sont constitués par des *éléments*, du corps, *respectivement conjugués* (**2**), construits d'ailleurs avec des coordonnées égales, relativement à des bases conjuguées.

$$\rho = \|x\ y\|\times\left\|\begin{matrix} q\times m \\ \\ q\times(\theta - c)\end{matrix}\right\| \in \mathbf{I} \quad\Leftrightarrow\quad \rho' = \|x\ y\|\times\left\|\begin{matrix} q\times m \\ \\ q\times(\theta' - c)\end{matrix}\right\| \in \mathbf{I}'.$$

Un idéal fractionnaire est **double**, lorsqu'il est égal à son conjugué. Il faut et il suffit que son facteur canonique soit double.

## 9. Bases arithmétiques d'un idéal.

La construction des éléments $\rho$, d'un idéal $\mathbf{I}$, fractionnaire (ou canonique), par les valeurs d'une forme, dont le couple de générateurs est une *base canonique* et dont les valeurs des variables sont des nombres entiers est une généralisation de la construction des entiers du corps (**4**), ou des éléments du domaine $\mathbf{E}(\theta)$, qui est d'ailleurs un idéal trivial (unité).

On réalise encore ainsi une *représentation propre*, des éléments de l'idéal par les couples de nombres entiers, ou par les sommets d'un réseau de parallélogrammes.

Si l'idéal est entier —ou contenu dans $\mathbf{E}(\theta)$— on peut représenter l'idéal par un réseau contenu dans celui qui représente $\mathbf{E}(\theta)$.