12. Multiplication des idéaux fractionnaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LES CORPS QUADRATIQUES

par A. Châtelet

(suite)

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ DES IDÉAUX

12. Multiplication des idéaux fractionnaires.

Entre les idéaux fractionnaires, d'un corps quadratique, on définit une opération, appelée *multiplication*, dont on vérifie qu'elle est déterminée, commutative et associative, et que l'opération inverse, appelée *division* est possible et déterminée, à l'exception de la division par un idéal nul.

Définition. — *Le* **produit** (résultat de la multiplication) *de deux idéaux*:

$$\mathbf{I} = (..,\rho_i,..), \quad i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \mathbf{J} = (..,\sigma_j,..), \quad j \text{ de } 1 \text{ à } k;$$

(définis par des bases algébriques (**10. 1**) de h et k générateurs), *est l'idéal*, désigné par $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$, *dont une base algébrique est constituée par les produits mutuels des générateurs*, des idéaux multipliés:

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J} = (..,\omega_{ij},..); \qquad \omega_{ij} = \rho_i \times \sigma_j, \quad \text{en nombre } h \times k.$$

Ce produit, qui est ainsi défini, est *déterminé*, c'est-à-dire indépendant des bases adoptées pour définir les idéaux multipliés.

C'est en effet l'ensemble des éléments du corps, de la forme:

$$\Sigma \xi_{ij} \times \omega_{ij} = \Sigma \xi_{ij} \times (\rho_i \times \sigma_j); \qquad \xi_{ij} \in \mathbf{E}(\theta);$$

(les ξ_{ij} étant des entiers arbitraires du corps). Cet ensemble est, par suite égal à l'ensemble des différences (et des sommes) mutuelles des produits de chaque élément de $\mathbf{I}$ par chaque élément de $\mathbf{J}$; ce qui est bien une construction indépendante des bases choisies.

La multiplication est manifestement *commutative*, comme celle des éléments du corps; elle s'étend à un nombre quelconque d'idéaux; elle est *associative*; car les générateurs d'un produit de trois idéaux peuvent s'écrire indifféremment:

$$\omega_{ijk} = (\rho_i \times \sigma_j) \times \tau_k = \rho_i \times (\sigma_j \times \tau_k).$$

La conjugaison conserve la multiplication: *le conjugué d'un produit* (d'idéaux) *est égal au produit des conjugués* (de ces idéaux)

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{J})' = \mathbf{I}' \times \mathbf{J}'.$$

Il suffit en effet de définir $\mathbf{I}'$ et $\mathbf{J}'$ par les générateurs conjugués de ceux de **I** et **J**; leurs produits mutuels seront les conjugués des générateurs de définition de $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$.

12. 2. *Cas particuliers.*

Le *produit*, d'un idéal **I**, *par un idéal principal* (ρ) est égal au *produit*, de **I**, *par* (l'élément de) *la base* ρ (**8. 4**)

$$(\rho) \times \mathbf{I} = \rho \times \mathbf{I};$$

notamment:

$$(0) \times \mathbf{I} = (0); \quad (1) \times \mathbf{I} = 1 \times \mathbf{I} = \mathbf{I}; \quad (\rho) \times (\sigma) = \rho \times (\sigma) = (\rho \times \sigma).$$

L'*idéal unité* (1), ou $\mathbf{E}(\theta)$, est un *élément neutre* pour la multiplication, d'où son nom, on montre ci-dessous (**14**) que c'est le seul.

Le produit $\mathbf{I} \times \mathbf{F}$, *par un idéal entier* **F**, *est inclus dans* **I**, car les produits des générateurs de **I** par ceux de **F**, qui sont des entiers du corps, appartiennent à **I** (3 de la condition caractéristique; **8. 2**).

Le produit de deux, ou plusieurs, *idéaux entiers* est un *idéal entier*, qui est *inclus dans chacun d'eux.*

12. 3. *Base arithmétique.*

On peut distinguer le cas d'idéaux définis par une base arithmétique (**9. 1**), c'est ce que précise l'énoncé:

Si, dans la multiplication de deux idéaux **I** et **J**, dont les termes des bases sont ρ_i et σ_j, *l'un d'eux*, au moins, *est défini par* *une base arithmétique, les produits des générateurs* $\rho_i \times \sigma_j$, *forment une base arithmétique*, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\dots,\rho_i,\dots) \text{ arithmétique } \Rightarrow (\dots,\rho_i \times \sigma_j,\dots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (**9. 5**) des bases arithmétiques. En prenant une base 1 τ, de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers z_{ir}, tels que:

$$\rho_i \times \tau = \Sigma z_{ir} \times \rho_r; \quad \text{tout } i \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad r \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \Sigma z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \quad r \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad \text{tous } i,j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (**10. 4**) (notamment d'un idéal principal, **11. 2**); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1 \, \gamma_2$, de sorte que:

$$(\dots,\rho_i,\dots) = (\gamma_1, \gamma_2) \times (\dots,\rho_i,\dots) = (\dots,\gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i,\dots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (**8. 1**), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m, \theta - c) = (q) \times (m, \theta - c) = (q \times m, q \times (\theta - c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal (q), de base q, par l'idéal canonique, de base arithmétique m, $\theta - c$, d'où la base arithmétique $q \times m$, $q \times (\theta - c)$.

13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (**8. 1**).