18. Divisibilité des idéaux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

On distingue les nombres premiers q_j, qui sont normes d'idéaux principaux premiers (congruence fondamentale impossible) et les nombres premiers p_j qui sont normes d'idéaux canoniques. On en déduit la décomposition:

$$(q) = [\Pi(q_j)^{kj}] \times \Pi[(p_i,\ \theta - c_i)^{hi} \times (p_i,\ \theta' - c_i)^{hi}].$$

Pour un *idéal fractionnaire*, mis sous forme canonique:

$$\mathbf{I} = q \times (m,\ \theta - c) = (q) \times (m,\ \theta - c);$$

on décompose les deux facteurs, comme il vient d'être dit, on forme le produit des deux décompositions, on associe éventuellement les puissances d'un même idéal, dont on additionne les exposants; on supprime ceux dont l'exposant devient ainsi nul.

L'existence de cette décomposition peut aussi être établie directement comme conséquence de la définition des idéaux premiers et de la constitution du *groupe* G_I des idéaux non nuls (**14**). Le raisonnement est analogue à celui qui est fait ordinairement pour les nombres rationnels et entiers.

La démonstration de la détermination de la décomposition faite pour les nombres rationnels, par comparaison de deux décompositions et par récurrence sur le nombre de facteurs (de l'une d'elles) s'étend de même à la décomposition des idéaux.

18. Divisibilité des idéaux.

On peut étendre aux idéaux (d'un corps quadratique) les propriétés usuelles de la *divisibilité* des nombres fractionnaires et entiers, de l'arithmétique élémentaire.

Pour comparer plusieurs idéaux fractionnaires **A**, **B**, ..., on peut utiliser un système de h idéaux premiers $\mathbf{P}_i$, comprenant tous ceux qui figurent dans une *décomposition* (**17**) de (au moins) un des idéaux considérés. On peut alors introduire dans ces décompositions, les puissances d'exposant nul (donc égales à l'idéal unité) de ceux des $\mathbf{P}_i$ qui n'y figuraient pas. Chacun des idéaux considérés est ainsi égal à un produit de puissances des h idéaux $\mathbf{P}_i$:

$$\mathbf{A} = \Pi \mathbf{P}_i^{ai}; \quad \mathbf{B} = \Pi \mathbf{P}_i^{bi}; \ldots \qquad a_i, b_i, \ldots \text{ nombres entiers};$$

et ils sont ainsi caractérisés par les systèmes de h exposants a_i; b_i;.

Leurs *produits*, ou leurs quotients, sont obtenus en *additionnant*, ou en retranchant, les exposants, de même indice:

$$(\Pi \mathbf{P}_i^{ai}) \times (\Pi \mathbf{P}_i^{bi}) = \Pi \mathbf{P}_i^{ai+bi}; \qquad (\Pi \mathbf{P}_i^{ai}) : (\Pi \mathbf{P}_i^{bi}) = \Pi \mathbf{P}_i^{ai-bi}.$$

Pour qu'un idéal, ainsi représenté, soit *entier*, il faut et il suffit qu'*aucun des exposants ne soit négatif*:

$$\{\Pi \mathbf{P}_i^{ai} \ \text{idéal entier}\} \Leftrightarrow \{a_i \geqslant 0, \ \text{tout } i\}.$$

DÉFINITION. — *Un idéal* (fractionnaire) **M** *est* **divisible** *par un idéal* **D**, non nul, —ou est **multiple** de **D**— lorsqu'il *est égal au produit de* **D** *par un idéal entier* —ou lorsque *le quotient* $\mathbf{M} \times \mathbf{D}^{-1}$ *est un idéal entier*— :

$$\{\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \subset (1)\} \quad \text{ou} \quad \mathbf{M} \times \mathbf{D}^{-1} \subset (1).$$

Deux idéaux fractionnaires **M** et **D** étant représentés par leurs décompositions avec un même système d'idéaux premiers $\mathbf{P}_i$, pour que **M** *soit divisible par* **D**, il faut et il suffit que *ses exposants soient au moins égaux à ceux de* **D**, de même indice:

$$\{(\Pi \mathbf{P}_i^{mi}) \ \text{divisible par} \ (\Pi \mathbf{P}_i^{di})\} \Leftrightarrow \{m_i \geqslant d_i; \ \text{tout } i\}$$

En particulier un *idéal premier* est diviseur d'un *idéal entier* lorsqu'il figure dans sa décomposition (avec un exposant non nul). Il est diviseur d'un produit d'idéaux entiers, si et seulement si il est diviseur de l'un d'eux (au moins).

De la condition de divisibilité, on déduit (comme pour la divisibilité des nombres fractionnaires) la formation du **plus grand commun diviseur** et du **plus petit multiple commun**, d'un système d'idéaux fractionnaires, décomposés en produits de puissances d'un même système d'idéaux premiers:

$$\mathbf{U} = \Pi \mathbf{P}_i^{ui}; \quad \mathbf{V} = \Pi \mathbf{P}_i^{vi}; \ \ldots; \qquad u_i, v_i, \ldots \ \text{entiers};$$

$$\text{p.g.c.d.} \ (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \ldots) = \Pi \mathbf{P}_i^{\text{minimum}\,(ui, vi, \ldots)};$$

$$\text{p.p.c.m.} \ [\mathbf{U}, \mathbf{V}, \ldots] = \Pi \mathbf{P}_i^{\text{maximum}\,(ui, vi, \ldots)}.$$

On peut en déduire des relations mutuelles; en particulier leur *corrélation* peut être exprimée par la construction:

l'inverse du p.g.c.d. (ou du p.p.c.m.) *est égal au p.p.c.m.* (ou au p.g.c.d.) des inverses.

On peut aussi énoncer des propriétés caractéristiques, corrélatives, en utilisant une définition préalable.

Définition. — *Des idéaux* (fractionnaires) *sont* **premiers entre eux** (dans leur ensemble) *lorsque leur p.g.c.d. est égal à l'idéal unité.*

Il est équivalent de dire qu'ils sont entiers et qu'il n'y a aucun facteur premier commun à leurs décompositions, avec un exposant non nul.

On vérifie immédiatement, en utilisant les systèmes d'exposants que: *pour qu'un idéal fractionnaire*:

$$\mathbf{D} \text{ soit p.g.c.d.} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{M} \text{ soit p.p.c.m.}$$

d'un système d'idéaux fractionnaires $\mathbf{F}_i$, *il faut et il suffit que les quotients*:

$$\mathbf{F}_i \times \mathbf{D}^{-1} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{M} \times \mathbf{F}_i^{-1},$$

soient premiers entre eux (dans leur ensemble).

18 bis. Utilisation du plus grand commun diviseur.

On peut définir et établir les notions de *divisibilité* en suivant le même ordre que celui qui est couramment employé en Arithmétique élémentaire et qui a été étendu par Dedekind aux idéaux des corps de nombres algébriques.

On peut définir d'abord et directement la divisibilité des idéaux fractionnaires par l'une des propriétés caractéristiques suivantes, dont l'équivalence résulte de l'existence de l'inverse d'un idéal non nul.

L'idéal $\mathbf{M}$ est divisible par l'idéal $\mathbf{D}$, *si le quotient* $\mathbf{M} \times \mathbf{D}^{-1}$ *est un idéal entier* (inclus dans l'idéal unité (1));

ou *si* $\mathbf{M}$ (ensemble d'éléments du corps) *est inclus dans* $\mathbf{D}$ **(10. 3)**

$$\mathbf{M} \times \mathbf{D}^{-1} \subset (1) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M} \subset \mathbf{D}.$$

On passe d'une inclusion à l'autre en multipliant les deux membres par $\mathbf{D}$ (inclusion de gauche), ou par $\mathbf{D}^{-1}$ (inclusion de droite).