3, 1. Remarques théoriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

par H. Breny

(suite)

3. Cas ou rg $\mathfrak{A} = \dim \mathsf{B}$.

3, 1. *Remarques théoriques.*

3, 11. Lorsque $r = p$, $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ est une matrice symétrique $p \times p$, régulière, dont on peut former l'inverse $\mathfrak{G}^{-1}$. Alors, de

$$\mathfrak{G}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$$

on tire

$$\hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1}\, \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}\ ,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H &= \mathbf{E}\, (\hat{\mathfrak{b}}_H - \mathfrak{b}_H)\, (\hat{\mathfrak{b}}_H - \mathfrak{b}_H)^T \\ &= \mathbf{E}\, \mathfrak{G}^{-1}\, \mathfrak{A}^T\, (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x})\, (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x})^T\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1}\ . \end{aligned}$$

Mais

$$\mathbf{E}\, (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x})\, (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x})^T = \mathbf{C}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{I}_n\, \sigma^2\ ,$$

donc

$$\mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1}\, \mathfrak{A}^T\, (\mathfrak{I}_n\, \sigma^2)\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1} = (\mathfrak{G}^{-1}\, \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1})\, \sigma^2 = \mathfrak{G}^{-1}\, \sigma^2\ . \tag{13}$$

Le calcul de $\mathfrak{G}^{-1}$ équivaut donc à celui de $\mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H$.

3, 12. Pour le calcul de **SCN**, il faut former les équations (7); ici, les $\mathfrak{u}_i^\star$ sont représentés par les lignes de $\mathfrak{A}^T$, $\mathfrak{c}_i^T$, de sorte que, aux inconnues près, le système (7) n'est autre que le système normal (donc, $\lambda_i = \hat{\mathfrak{b}}_{H,i}$); il résulte alors de (8) que

$$\begin{aligned} \mathbf{SCN} = \sum_1^p \hat{\mathfrak{b}}_{H,i}\, \mathfrak{c}_i^T\, \mathfrak{x} &= \hat{\mathfrak{b}}_H^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x} \\ &= (\mathfrak{x}^\star\, \mathfrak{A})\, \mathfrak{G}^{-1}\, (\mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x})\ . \end{aligned} \tag{14}$$

3, 13. **SCE** acquiert ici une signification très simple. En effet, si on pose

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}$$

(de sorte que les composantes $r_{H,i}$ de r_H sont les «résidus»), on a, d'une part,

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{y} = \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H ,$$

et, d'autre part,

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{y} = \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{A}^T \mathfrak{r} ;$$

on a donc $\mathfrak{A}^T \mathfrak{r} = 0$; dès lors

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}^\star \mathfrak{y} &= \left(\hat{\mathfrak{b}}_H^T \mathfrak{A}^T + \mathfrak{r}^T\right)\left(\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}\right) \\ &= \hat{\mathfrak{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}^T \mathfrak{r} + \hat{\mathfrak{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^T \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H \\ &= \hat{\mathfrak{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{y} + \mathfrak{r}^T \mathfrak{r} = \mathbf{SCN} + \mathfrak{r}^T \mathfrak{r} , \end{aligned}$$

d'où, puisque $\mathfrak{y}^\star \mathfrak{y} = \mathbf{SCT}$,

$$\mathbf{SCE} = \mathfrak{r}^T \mathfrak{r} = \sum_1^n \mathfrak{r}_{H,i}^2 .$$

3, 14. Si $\mathfrak{G}$ est diagonale (ce qui arrive si et seulement si les lignes de $\mathfrak{A}^T$ correspondent à des vecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbf{V}_+$), les $\hat{\mathfrak{b}}_{H,i}$ sont deux à deux orthogonaux, et

$$\mathbf{SCN} = \sum_1^p \mathrm{SC}\{\hat{\mathfrak{b}}_{H,i}\} .$$

3, 2. *Exécution des calculs.*

3, 21. La résolution des équations normales peut évidemment se faire par un procédé quelconque. On sait toutefois, depuis Benoît et Banachiewicz, que les procédés « compacts » habituels constituent tous des variations plus ou moins heureuses de la méthode de « factorisation triangulaire », particulièrement simple à appliquer dans le cas d'une matrice symétrique, comme l'est $\mathfrak{G}$ (cfr. [VI, VII]).

3, 22. Il s'agit, en principe, de trouver une matrice $\mathfrak{S}$, triangulaire supérieure, telle que

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^T \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \times^0 \mathfrak{S} .$$