

# 3, 1. Remarques théoriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

par H. BRENY

(suite)

3. CAS OU  $\text{rg } \mathfrak{A} = \dim \mathbf{B}$ .

3, 1. *Remarques théoriques.*

3, 11. Lorsque  $r = p$ ,  $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$  est une matrice symétrique  $p \times p$ , régulière, dont on peut former l'inverse  $\mathfrak{G}^{-1}$ . Alors, de

$$\mathfrak{G} \hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$$

on tire

$$\hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T \mathfrak{x},$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \hat{\mathbf{b}}_H &= \mathbf{E} (\hat{\mathbf{b}}_H - \mathfrak{b}_H) (\hat{\mathbf{b}}_H - \mathfrak{b}_H)^T \\ &= \mathbf{E} \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{x} - \mathbf{E} \mathfrak{x}) (\mathfrak{x} - \mathbf{E} \mathfrak{x})^T \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{-1}. \end{aligned}$$

Mais

$$\mathbf{E} (\mathfrak{x} - \mathbf{E} \mathfrak{x}) (\mathfrak{x} - \mathbf{E} \mathfrak{x})^T = \mathbf{C} \mathfrak{x} = \mathfrak{S}_n \sigma^2,$$

donc

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{S}_n \sigma^2) \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{-1} = (\mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{-1}) \sigma^2 = \mathfrak{G}^{-1} \sigma^2. \quad (13)$$

Le calcul de  $\mathfrak{G}^{-1}$  équivaut donc à celui de  $\mathbf{C} \hat{\mathbf{b}}_H$ .

3, 12. Pour le calcul de **SCN**, il faut former les équations (7); ici, les  $u_i^*$  sont représentés par les lignes de  $\mathfrak{A}^T$ ,  $c_i^T$ , de sorte que, aux inconnues près, le système (7) n'est autre que le système normal (donc,  $\lambda_i = \hat{\mathbf{b}}_{H,i}$ ); il résulte alors de (8) que

$$\begin{aligned} \text{SCN} &= \sum_1^p \hat{\mathbf{b}}_{H,i} c_i^T \mathfrak{x} = \hat{\mathbf{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} \\ &= (\mathfrak{x}^* \mathfrak{A}) \mathfrak{G}^{-1} (\mathfrak{A}^T \mathfrak{x}). \quad (14) \end{aligned}$$

3, 13. SCE acquiert ici une signification très simple. En effet, si on pose

$$\mathbf{x} = \mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H + \mathbf{r}$$

(de sorte que les composantes  $r_{H,i}$  de  $\mathbf{r}_H$  sont les « résidus »), on a, d'une part,

$$\mathfrak{A}^T \mathbf{x} = \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H,$$

et, d'autre part,

$$\mathfrak{A}^T \mathbf{x} = \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H + \mathfrak{A}^T \mathbf{r};$$

on a donc  $\mathfrak{A}^T \mathbf{r} = 0$ ; dès lors

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{x} &= (\hat{\mathbf{b}}_H^T \mathfrak{A}^T + \mathbf{r}^T) (\mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H + \mathbf{r}) \\ &= \hat{\mathbf{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H + \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \hat{\mathbf{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathfrak{A} \hat{\mathbf{b}}_H \\ &= \hat{\mathbf{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \text{SCN} + \mathbf{r}^T \mathbf{r}, \end{aligned}$$

d'où, puisque  $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = \text{SCT}$ ,

$$\text{SCE} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \sum_1^n r_{H,i}^2.$$

3, 14. Si  $\mathfrak{G}$  est diagonale (ce qui arrive si et seulement si les lignes de  $\mathfrak{A}^T$  correspondent à des vecteurs deux à deux orthogonaux de  $\mathbf{V}_+$ ), les  $\hat{\mathbf{b}}_{H,i}$  sont deux à deux orthogonaux, et

$$\text{SCN} = \sum_1^p \text{SC}\{\hat{\mathbf{b}}_{H,i}\}.$$

### 3, 2. Exécution des calculs.

3, 21. La résolution des équations normales peut évidemment se faire par un procédé quelconque. On sait toutefois, depuis Benoît et Banachiewicz, que les procédés « compacts » habituels constituent tous des variations plus ou moins heureuses de la méthode de « factorisation triangulaire », particulièrement simple à appliquer dans le cas d'une matrice symétrique, comme l'est  $\mathfrak{G}$  (cfr. [VI, VII]).

3, 22. Il s'agit, en principe, de trouver une matrice  $\mathfrak{S}$ , triangulaire supérieure, telle que

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^T \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \times^0 \mathfrak{S}.$$