

CHAPITRE IV CRIBLES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE IV

CRIBLES

27. Calcul des diviseurs premiers.

Les propriétés des idéaux canoniques, dans un corps quadratique, et des idéaux réduits, peuvent être interprétées sous la forme de propriétés des *nombres premiers* (rationnels), analogues à celles du « crible d'Eratosthène ». On reprend, en se plaçant à ce point de vue, les constructions et définitions déjà indiquées, en sorte que le chapitre actuel peut être considéré comme indépendant des autres.

On forme, pour les valeurs entières de x , croissantes à partir de 0, la suite des valeurs d'un trinôme du second degré :

$$F(x) = x^2 + Sx + N; \begin{cases} S = -1; & N \text{ quelconque;} \\ S = 0; & N \not\equiv +1; \pmod{4}; \end{cases}$$

sous la réserve que le discriminant $D = S^2 - 4N$, n'ait pas de facteur carré, à l'exclusion de 4 (si $S = 0$); et ne soit pas égal à +4.

On se propose de chercher les facteurs premiers qui sont des diviseurs des valeurs de cette suite.

A cet effet, on détermine un rang r , tel que pour tout x , au moins égal à r :

$$|F(x)| < (2x - S)^2.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente, suivant le cas (25) à :

$$\begin{aligned} D > 0; & \quad 5(2x - S)^2 > D \Leftrightarrow x \geq r; \\ D < 0; & \quad 3(2x - S)^2 > |D| \Leftrightarrow x \geq r \end{aligned}$$

(dans le cas de D positif, $F(x)$ est négatif, notamment pour toutes les valeurs de x strictement inférieures à r).

On appelle **racine minimum** \bar{c}_p , d'un nombre (entier rationnel) premier p , la plus petite valeur entière de x (nulle ou positive) s'il en existe, telle que $|F(x)|$ soit divisible par p .

Les valeurs de x pour lesquelles $|F(x)|$ est divisible par p (zéros de la congruence fondamentale; (5), sont alors les termes de deux progressions arithmétiques, de raison p :

$$\bar{c}_p + \lambda p; \quad S - \bar{c}_p + (\lambda + 1)p; \quad (\lambda \text{ entier } \geq 0).$$

Ces deux progressions sont confondues si $2\bar{c}_p - S = p$; alors p est diviseur du discriminant.

Ces propriétés résultent de la construction des idéaux (7 et 21) les valeurs de x sont les racines des deux idéaux canoniques conjugués, de norme p , donc premiers et de produit égal à l'idéal principal (p) . On peut aussi les établir directement comme conséquences de l'étude de la congruence fondamentale (5) pour un module premier.

On peut alors prendre comme base de l'algorithme du crible, la propriété fondamentale suivante.

Pour chaque valeur de x , au moins égale au rang r , si un nombre premier p est diviseur de $F(x)$ et si son carré est au plus égal à $|F(x)|$, sa racine minimum \bar{c}_p est (strictement) inférieure à x —ou il est diviseur d'une valeur antérieure du tableau— .

$$\begin{aligned} x \geq r; \quad p \text{ diviseur de } |F(x)|; \quad p^2 \leq |F(x)|: \\ \Rightarrow \text{Existe } \bar{c}_p < x \quad \text{et} \quad p \text{ diviseur de } |F(\bar{c}_p)|. \end{aligned}$$

On peut vérifier directement cette propriété en conjuguant la définition de r et la limitation de p^2 :

$$\begin{aligned} x \geq r \quad \Rightarrow \quad p^2 \leq |F(x)| < (2x - S)^2 \\ \Rightarrow \quad (2\bar{c}_p - S)^2 \leq p^2 < (2x - S)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_p < x. \end{aligned}$$

On peut aussi bien considérer l'idéal canonique de norme p , de racines $x + \lambda p$ et sa racine minimum (non négative) \bar{c}_p . S'il est réduit, \bar{c}_p est inférieur à r , donc à x . S'il n'est pas réduit $|F(\bar{c}_p)|$ est inférieur à p^2 , de sorte que x ne peut être égal à \bar{c}_p , donc lui est supérieur.

On choisit un nombre h , au moins égal à $r-1$ ($r-1 \leq h < H$), on considère les h premières valeurs de la suite et on décompose chacune d'elles en un produit de facteurs premiers p .

On détermine, pour chacune des valeurs successives de x ($h < x \leq H$), les puissances des nombres premiers p , précédemment obtenus, qui divisent exactement $|F(x)|$; on forme, pour chaque x , le quotient q_x de $|F(x)|$ par le produit de ces puissances.

1. *Le premier quotient q_c , ainsi obtenu ($c > h$), qui soit différent de 1 est un nombre premier.*

2. *Les quotients suivants, pour les valeurs de x , ($h < x < h_1$), vérifiant la condition (c déterminé comme il vient d'être dit):*

$$|F(x)| < (2c-S)^2;$$

sont égaux à 1, ou sont des nombres premiers.

1. Quel que soit le diviseur premier p , du quotient q_c , il n'est pas diviseur d'une valeur antérieure $|F(x)|$, sa racine minimum est c et p^2 est supérieur à $|F(c)|$ (c étant au moins égal à r). Donc:

$$p^2 > |F(c)| \geq q_c.$$

Or il y a au plus un diviseur de q_c , dont le carré lui est supérieur; de sorte que si q_x est différent de 1, il est égal à son seul facteur premier p .

2. Si un quotient q_x , pour $x > c$, est différent de 1 et n'est pas premier, il admet au moins un facteur premier p_1 dont le carré lui est au plus égal. Ce facteur ne divise aucune des valeurs antérieures à $F(c)$ et sa racine minimum c_1 est au moins égale à c , de sorte que:

$$(2c-S)^2 \leq (2c_1-S)^2 \leq p_1^2 \leq q_x \leq |F(x)|.$$

Ce quotient q_x ne peut donc être obtenu que pour une valeur de x , au delà des limites fixées par l'énoncé.

Ces règles peuvent s'appliquer par récurrence ascendante à des suites de valeurs croissantes $h_0 \geq r-1$; $h_1 > h_0$; ...

28. Exemples de calculs.

Le tableau V donne les valeurs pour x de 0 à $H = 100$, du trinôme $F(x)$ déjà utilisé (tableaux I et III), de discriminant $D = -39$. Le rang r (25) est égal à 2.

Les deux premières valeurs de $F(x)$, ont pour diviseurs premiers **2, 3, 5**, qui sont des diviseurs de $F(x)$, pour les valeurs respectives:

$$0+2\lambda, 1+2\lambda; \quad 0+5\lambda, 4+5\lambda; \quad 1+3\lambda.$$

Il n'y a qu'une progression pour 3, qui est diviseur de D .

On a inscrit devant chaque valeur de la table, le monôme des puissances des facteurs 2, 3, 5, qui en est diviseur, de façon à calculer les quotients q_x . Les périodicités, ou les progressions sont mises en évidence par l'alignement (vertical) de ces facteurs.

Le premier quotient, rencontré ensuite, qui soit différent de 1 est $F(3):2 = \mathbf{11}$. Il est premier, on l'a inscrit devant les valeurs dont il est diviseur et qui sont données par les progressions de raison 11 et de premiers termes 3 et 7. Deux seulement $F(51)$ et $F(69)$ sont divisibles par une puissance supérieure de 11; les autres appartenant à des progressions de raison 11^2 sont extérieures à la table.

Le premier quotient obtenu ensuite, qui soit différent de 1 est $F(6):2^2 = \mathbf{13}$. C'est un nombre premier, diviseur de D ; il n'est obtenu que pour les valeurs d'une seule progression $6+13\lambda$, et seulement à la première puissance.

Les quotients suivants, jusqu'à $F(13)$ exclus, qui devient supérieur à $(2 \times 6 + 1)^2 = 169$, sont égaux à 1, ou sont premiers:

$$F(7): (2 \times 3 \times 11) = 1; \quad F(8): 2 = \mathbf{41}; \quad F(9): (2^2 \times 5^2) = 1; \\ F(10): (2^3 \times 3 \times 5) = 1; \quad F(11): 2 = \mathbf{71}; \quad F(12): 2 = \mathbf{83}.$$

On inscrit ces nombres premiers devant les valeurs de la table, dont ils sont diviseurs, et qui sont données par:

$$\mathbf{41} \text{ pour } x = 8, 49, 90; \quad 32, 73; \quad \mathbf{71} \text{ pour } x = 11, 82; \quad 59; \\ \mathbf{83} \text{ pour } x = 12, 95; \quad 70;$$

ils n'y figurent qu'à la première puissance.

Le premier quotient différent de 1, qui est rencontré ensuite est $F(16): (2 \times 3) = \mathbf{47}$; il est premier et il en est de même de ceux des

quotients suivants, qui sont différents de 1, jusqu'à $F(33)$ exclus, qui est supérieur à $(2 \times 16 + 1)^2 = 1\ 089$. Certains sont encore diviseurs d'autres valeurs du tableau, ce sont :

47 pour $x = 16, 63; 30, 77;$ **79** pour $x = 17, 96; 61;$
43 pour $x = 20, 63; 22, 65;$ **59** pour $x = 21, 80; 37, 96;$
61 pour $x = 24, 85; 36, 97;$ **89** pour $x = 26; 62.$

Par contre, les diviseurs premiers **281, 383, 137**, ne se rencontrent plus dans le tableau, limité à $H = 100$.

Le premier quotient rencontré ensuite, est $F(33): 2^2 = \mathbf{283}$; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants qui sont différents de 1 jusqu'à $F(67)$ exclus qui est supérieur à $(2 \times 33 + 1)^2 = 4\ 489$. Dans ces quotients, ceux qui figurent plus d'une fois dans le tableau, limité à $H = 100$, sont :

127 pour $x = 35; 91;$ **103** pour $x = 47; 55;$
149 pour $x = 54; 94;$ **139** pour $x = 64; 74.$

Le premier quotient rencontré ensuite est $F(67): (2 \times 3) = \mathbf{761}$; il est premier et il en est de même de tous les quotients suivants de la table, car $(2 \times 67 + 1)^2 = 18\ 225$ est supérieur à $F(100)$.

Dans la table, les nombres en caractères gras sont les facteurs p rencontrés pour leur racine minimum \bar{c}_p (ou pour la première fois).

On rappelle qu'il a été indiqué ci-dessus que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à douze progressions arithmétiques de raison commune 39.

Le *deuxième exemple*, donné dans le tableau VI, est constitué par les valeurs pour x de O à $H = 100$, du trinôme, de discriminant D positif (définissant un corps réel) :

$$F(x) = x^2 - 47; \quad D = (-4) \times (-47) = 188.$$

Les valeurs sont négatives et de valeurs absolues décroissantes jusqu'à $F(6)$; elles sont ensuite positives et croissantes.

Le rang r est égal à 4, car :

$$5 \times (2 \times 3)^2 = 180 < 4 \times 47 < 5 \times (2 \times 4)^2 = 320.$$

Les quatre premières valeurs de $F(x)$ ont pour diviseurs premiers : **2, 47**, qui sont diviseurs de D , et **23, 43, 19**. On inscrit devant chaque valeur les monômes de ces facteurs qui en sont des diviseurs.

TABLEAU V. $F(x) = x^2 + x + 10$ $D = -39 = (-3) \times 13$ $r = 2$.

c	F(c)	Diviseurs
0	10	2. 5
1	12	2 ² . 3
2	16	2 ⁴
3	22	2. 11
4	30	2. 3. 5
5	40	2 ³ . 5
6	52	2 ² . 13
7	66	2. 3. 11
8	82	2. 41
9	100	2 ² . 5 ²
10	120	2 ³ . 3. 5
11	142	2. 71
12	166	2. 83
13	192	2 ⁶ . 3
14	220	2 ² . 5. 11
15	250	2. 5 ³
16	282	2. 3. 47
17	316	2 ² . 79
18	352	2 ⁵ . 11
19	390	2. 3. 5. 13
20	430	2. 5. 43
21	472	2 ³ . 59
22	516	2 ² . 3. 43
23	562	2. 281
24	610	2. 5. 61

c	F(c)	Diviseurs
25	660	2 ² . 3. 5. 11
26	712	2 ³ . 89
27	766	2. 383
28	822	2. 3. 137
29	880	2 ⁴ . 5. 11
30	940	2 ² . 5. 47
31	1 002	2. 3. 167
32	1 066	2. 13. 41
33	1 132	2 ² . 283
34	1 200	2 ⁴ . 3. 5 ²
35	1 270	2. 5. 127
36	1 342	2. 11. 61
37	1 416	2 ³ . 3. 59
38	1 492	2 ² . 373
39	1 570	2. 5. 157
40	1 650	2. 3. 5 ² . 11
41	1 732	2 ² . 433
42	1 816	2 ³ . 227
43	1 902	2. 3. 317
44	1 990	2. 5. 199
45	2 080	2 ⁵ . 5. 13
46	2 172	2 ² . 3. 181
47	2 266	2. 11. 103
48	2 362	2. 1 181
49	2 460	2 ² . 3. 5. 41

c	F(c)	Diviseurs
50	2 560	2 ⁹ . 5.
51	2 662	2. 11 ³
52	2 766	2. 3. 461
53	2 872	2 ³ . 359
54	2 980	2 ² . 5. 149
55	3 090	2. 3. 5. 103
56	3 202	2. 1 601
57	3 316	2 ² . 829
58	3 432	2 ³ . 3. 11. 13
59	3 550	2. 5 ² . 71
60	3 670	2. 5. 367
61	3 792	2 ⁴ . 3. 79
62	3 916	2 ² . 11. 89
63	4 042	2. 43. 47
64	4 170	2. 3. 5. 139
65	4 300	2 ² . 5 ² . 43
66	4 432	2 ⁴ . 277
67	4 566	2. 3. 761
68	4 702	2. 2 351
69	4 840	2 ³ . 5. 11 ²
70	4 980	2 ² . 3. 5. 83
71	5 122	2. 13. 197
72	5 266	2. 2 633
73	5 412	2 ² . 3. 11. 41
74	5 560	2 ³ . 5. 139

c	F(c)	Diviseurs
75	5 710	2. 5. 571
76	5 862	2. 3. 977
77	6 016	2 ⁷ . 47
78	6 172	2 ² . 1 543
79	6 330	2. 3. 5. 211
80	6 490	2. 5. 11. 59
81	6 652	2 ² . 1 663
82	6 816	2 ⁵ . 3. 71
83	6 982	2. 3 491
84	7 150	2. 5 ² . 11. 13
85	7 320	2 ³ . 3. 5. 61
86	7 492	2 ² . 1 873
87	7 666	2. 3 833
88	7 842	2. 3. 1 307
89	8 020	2 ² . 5. 401
90	8 200	2 ³ . 5 ² . 41
91	8 382	2. 3. 11. 127
92	8 566	2. 4 283
93	8 752	2 ⁴ . 547
94	8 940	2 ² . 3. 5. 149
95	9 130	2. 5. 11. 83
96	9 322	2. 59. 79
97	9 516	2 ² . 3. 13. 61
98	9 712	2 ⁴ . 607
99	9 910	2. 5. 991
100	10 110	2. 3. 5. 337

Les quotients suivants, pour les valeurs de x , définies par:

$$|F(x)| \leq (2 \times 4)^2 \Rightarrow x \leq 10$$

sont uniquement des valeurs, ou des moitiés de valeurs du polynôme puisqu'à l'exception du diviseur 2, la première valeur devant laquelle on a inscrit un des diviseurs précédents est $F(16)$ divisible par 19. Ce sont:

$$F(4) = -\mathbf{31}; \quad F(5):2 = -\mathbf{11}; \quad F(6) = -11; \quad F(7):2 = +2; \\ F(8) = +\mathbf{17}; \quad F(9):2 = +17; \quad F(10) = +\mathbf{53}.$$

On les inscrit devant les valeurs suivantes de la table qu'ils divisent, éventuellement avec l'exposant convenable.

Le quotient suivant $F(11):2 = +\mathbf{37}$ est premier; ceux qui suivent pour les valeurs de x :

$$|F(x)| \leq (2 \times 11)^2 \Rightarrow x \leq 23,$$

sont égaux à 1, ou sont premiers. Ces derniers sont encore égaux aux valeurs, ou aux moitiés des valeurs du polynôme; les seuls quotients donnés par des diviseurs déjà inscrits, à l'exception de 2, sont:

$$F(16):(19 \times 11) = +1; \quad F(22):(23 \times 19) = +1.$$

Les seuls nombres premiers ainsi obtenus qui figurent encore dans la table, limitée à $H = 100$, sont **37, 97, 61, 89**.

Le premier quotient suivant qui est différent de 1 est $F(28):11 = \mathbf{67}$, ceux qui suivent pour les valeurs de x :

$$|F(x)| \leq (2 \times 28)^2 \Rightarrow x \leq 56,$$

sont égaux à 1 ou premiers; ceux qui figurent plus d'une fois dans la table sont: **67, 127, 101, 107, 151**.

Au-delà de $x = 56$, tous les quotients sont premiers ou égaux à 1.

La disposition typographique est semblable à celle de l'exemple précédent, les nombres premiers obtenus pour la première fois (pour leur racine minimum) sont en caractères gras.

L'application de la loi de la réciprocité (22) montre que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à $\varphi(168):2 = 46$ progressions arithmétiques, de raison commune 168 et de premiers termes: 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 31, 35, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 65, 67, 81, 87, 89, 91, 97, 99, 101, 107, 121, 123, 127, 135, 139, 145, 149, 151, 153, 157, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 177, 179, 187.

TABLEAU VI.

$$F(x) = x^2 - 47 \quad D = 188 = (-4) \times (-47) \quad r = 4.$$

c	F(c)	Diviseurs
0	-47	47
1	-46	2. 23
2	-43	43
3	-38	2. 19
4	-31	31
5	-22	2. 11
6	-11	11
7	+	2.
8	17	17
9	34	2. 17
10	53	53
11	74	2. 37
12	97	97
13	122	2. 61
14	149	149
15	178	2. 89
16	209	19. 11
17	242	2. 11 ²
18	277	277
19	314	2. 157
20	353	353
21	394	2. 197
22	437	23. 19
23	482	2. 241
24	529	23 ²

c	F(c)	Diviseurs
25	578	2. 17 ²
26	629	17. 37
27	682	2. 31. 11
28	737	11. 67
29	794	2. 397
30	853	853
31	914	2. 457
32	977	977
33	1 042	2. 521
34	1 109	1 109
35	1 178	2. 19. 31
36	1 249	1 249
37	1 322	2. 661
38	1 397	11. 127
39	1 474	2. 11. 67
40	1 553	1 553
41	1 634	2. 43. 19
42	1 717	17. 101
43	1 802	2. 17. 53
44	1 889	1 889
45	1 978	2. 23. 43
46	2 069	2 069
47	2 162	2. 47. 23
48	2 257	37. 61
49	2 354	2. 11. 107

c	F(c)	Diviseurs
50	2 453	11. 223
51	2 554	2. 1 277
52	2 657	2 657
53	2 762	2. 1 381
54	2 869	19. 151
55	2 978	2. 1 489
56	3 089	3 089
57	3 202	2. 1 601
58	3 317	31. 107
59	3 434	2. 17. 101
60	3 553	19. 11. 17
61	3 674	2. 11. 167
62	3 797	3 797
63	3 922	2. 53. 37
64	4 049	4 049
65	4 178	2. 2 089
66	4 309	31. 139
67	4 442	2. 2 221
68	4 577	23. 199
69	4 714	2. 2 357
70	4 853	23. 211
71	4 994	2. 11. 227
72	5 137	11. 467
73	5 282	2. 19. 139
74	5 429	61. 89

c	F(c)	Diviseurs
75	5 578	2. 2 789
76	5 729	17. 337
77	5 882	2. 17. 173
78	6 037	6 037
79	6 194	2. 19. 163
80	6 353	6 353
81	6 514	2. 3 257
82	6 677	11. 607
83	6 842	2. 11. 311
84	7 009	43. 163
85	7 178	2. 37. 97
86	7 349	7 349
87	7 522	2. 3 761
88	7 697	43. 179
89	7 874	2. 31. 127
90	8 053	8 053
91	8 234	2. 23. 179
92	8 417	19. 443
93	8 602	2. 23. 11. 17
94	8 789	47. 11. 17.
95	8 978	2. 67 ² .
96	9 169	53. 173
97	9 362	2. 31. 151
98	9 557	19. 503
99	9 754	2. 4 877
100	9 953	37. 269

29. Successions de nombres premiers.

Dans le deuxième exemple traité, les quinze premières valeurs de $|F(x)|$ sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers. Cette particularité tient à ce que les valeurs de $|F(x)|$ pour $x < r$, sont des nombres premiers relativement grands, qui ne se retrouvent, par suite, dans la table, qu'à des rangs relativement éloignés. Il existe d'autres exemples de ce même phénomène.

Un exemple (bien connu, au moins depuis Euler) est constitué par les valeurs du trinôme (à discriminant D négatif):

$$F(x) = x^2 + x + 41; \quad D = -163.$$

Le tableau VII en donne les valeurs pour les valeurs entières de x , de 0 à 299; pour celles qui ne sont pas des nombres premiers, on a seulement inscrit leur décomposition en facteurs premiers.

Les quarantes premières valeurs de $F(x)$ sont des nombres premiers.

Le rang r est égal à 4; les quatre premières valeurs sont les nombres premiers:

$$41, \quad 43, \quad 47, \quad 53.$$

Ils ne se retrouvent comme facteurs qu'au-delà de $x = 39$. On peut montrer par récurrence sur c , compris entre 4 et 39 inclus, que $F(c)$ est un nombre premier, de racine minimum égale à c . Car, il en est ainsi pour $F(4)$, et, par hypothèse de récurrence, pour toute valeur $F(x)$, x étant compris entre 0 inclus et c exclus; en outre la racine conjuguée du nombre premier $F(x)$ est supérieure à 39, puisque

$$F(x) - x - 1 = x^2 + 40 \geq 40.$$

Il s'en suit que $F(c)$ ne peut être divisible par aucun des nombres premiers $F(x)$, il est donc premier et de racine minimum c .

A l'exclusion des sept décompositions:

$$\begin{aligned} F(40) &= 41^2, & F(41) &= 41 \times 43, & F(44) &= 43 \times 47, \\ F(49) &= 47 \times 53, & F(56) &= 53 \times 61, & F(65) &= 61 \times 71, \\ F(76) &= 71 \times 83 \end{aligned}$$

les valeurs de $F(40)$ à $F(80)$, sont des nombres premiers (soient 34 nombres premiers nouveaux).

TABLEAU VII.

$$F(x) = x^2 + x + 41; \text{ discriminant: } -163; r = 4.$$

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0	41	42	1 847	84	43×167	126	61×263
1	43	43	1 933	85	7 351	127	43×379
2	47	44	43×47	86	7 523	128	16 553
3	53	45	2 111	87	43×179	129	16 811
4	61	46	2 203	88	7 873	130	43×397
5	71	47	2 297	89	83×97	131	17 333
6	83	48	2 393	90	8 231	132	17 597
7	97	49	47×53	91	47×179	133	17 863
8	113	50	2 591	92	8 597	134	18 131
9	131	51	2 693	93	8 783	135	18 401
10	151	52	2 797	94	8 971	136	71×263
11	173	53	2 903	95	9 161	137	18 947
12	197	54	3 011	96	47×199	138	47×409
13	223	55	3 121	97	9 547	139	19 501
14	251	56	53×61	98	9 743	140	131×151
15	281	57	3 347	99	9 941	141	20 063
16	313	58	3 463	100	10 141	142	20 347
17	347	59	3 581	101	10 343	143	47×439
18	383	60	3 701	102	53×199	144	20 921
19	421	61	3 823	103	10 753	145	21 211
20	461	62	3 947	104	97×113	146	21 503
21	503	63	4 073	105	11 171	147	71×307
22	547	64	4 201	106	11 383	148	22 093
23	593	65	61×71	107	11 597	149	22 391
24	641	66	4 463	108	11 813	150	22 691
25	691	67	4 597	109	53×227	151	22 993
26	743	68	4 733	110	12 251	152	23 297
27	797	69	4 871	111	12 473	153	23 603
28	853	70	5 011	112	12 697	154	23 911
29	911	71	5 153	113	12 923	155	53×457
30	971	72	5 297	114	13 151	156	24 533
31	1 033	73	5 443	115	13 381	157	24 847
32	1 097	74	5 591	116	13 613	158	25 163
33	1 163	75	5 741	117	61×227	159	83×307
34	1 231	76	71×83	118	14 083	160	25 801
35	1 301	77	6 047	119	14 321	161	151×173
36	1 373	78	6 203	120	14 561	162	53×499
37	1 447	79	6 361	121	113×131	163	41×653
38	1 523	80	6 521	122	41×367	164	41×661
39	1 601	81	41×163	123	41×373	165	27 431
40	41^2	82	41×167	124	15 541	166	27 763
41	41×43	83	7 013	125	15 791	167	28 097

TABLEAU VII. (suite).

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
168	28 433	201	97×419	234	113×487	267	71 597
169	28 771	202	41 047	235	55 501	268	$53 \times 1\ 361$
170	43×677	203	41 453	236	223×251	269	72 671
171	29 453	204	$41 \times 1\ 021$	237	$47 \times 1\ 201$	270	179×409
172	83×359	205	$41 \times 1\ 031$	238	56 923	271	131×563
173	43×701	206	42 683	239	61×941	272	74 297
174	30 491	207	71×607	240	57 881	273	74 843
175	30 841	208	53×821	241	58 363	274	75 391
176	31 193	209	197×223	242	83×709	275	75 941
177	31 547	210	44 351	243	59 333	276	76 493
178	61×523	211	44 773	244	163×367	277	77 047
179	32 261	212	45 197	245	$41 \times 1\ 471$	278	$71 \times 1\ 093$
180	32 621	213	$43 \times 1\ 061$	246	$41 \times 1\ 483$	279	$47 \times 1\ 663$
181	32 983	214	46 051	247	61 297	280	78 721
182	33 347	215	53×877	248	$61 \times 1\ 013$	281	79 283
183	33 713	216	$43 \times 1\ 091$	249	167×373	282	79 847
184	173×197	217	113×419	250	62 791	283	97×829
185	47×733	218	71×673	251	167×379	284	$47 \times 1\ 723$
186	97×359	219	48 221	252	131×487	285	81 551
187	61×577	220	48 661	253	64 303	286	$41 \times 2\ 003$
188	35 573	221	49 103	254	64 811	287	$41 \times 2\ 017$
189	35 951	222	49 547	255	83×787	288	83 273
190	47×773	223	49 993	256	$43 \times 1\ 531$	289	$71 \times 1\ 181$
191	36 713	224	50 441	257	66 347	290	84 431
192	37 097	225	50 891	258	66 863	291	151×563
193	37 483	226	51 343	259	$43 \times 1\ 567$	292	85 597
194	37 871	227	51 797	260	67 901	293	86 183
195	38 261	228	52 253	261	$53 \times 1\ 291$	294	86 771
196	38 653	229	52 711	262	68 947	295	199×439
197	39 047	230	53 171	263	69 473	296	281×313
198	39 443	231	53 633	264	70 001	297	88 547
199	39 841	232	$47 \times 1\ 151$	265	251×281	298	97×919
200	40 241	233	54 563	266	179×397	299	$43 \times 2\ 087$

Au-delà de $F(40)$, on inscrit les premiers nombres premiers de la table devant les valeurs qu'ils divisent, on obtient les sept décompositions indiquées; puis $F(81) = 41 \times 163$, qui comporte un diviseur premier non encore obtenu, ou de racine minimum 81.

A toute valeur $F(c)$, pour c compris entre 7 et 80 inclus, exception faite des valeurs de décomposition, on peut appliquer le raisonnement de récurrence précédent. Tout $F(x)$, de $F(6)$ à $F(c)$ exclus, étant

supposé premier, de racine minimum x , sa racine conjuguée est supérieure à 81, car :

$$F(x) - x - 1 = x^2 + 40 \geq 49 + 40 = 89.$$

Il ne divise donc pas $F(c)$, qui n'étant pas divisible par les valeurs de $F(0)$ à $F(6)$ est un nombre premier de racine minimum c .

Pour toutes les valeurs de x , au-delà de 80 et telles que :

$$F(x) \leq (2 \times 80 + 1)^2 \Rightarrow x \leq 161,$$

les quotients obtenus (après division éventuelle par les monômes des nombres premiers précédents, qui peuvent être limités aux douze premiers), sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Certains sont diviseurs de valeurs ultérieures du tableau concurremment avec des nombres premiers déjà trouvés. On les inscrit et on forme les quotients qui sont tous premiers ou égaux à 1, dans la limite de la table, dont les valeurs restantes sont inférieures à $(2 \times 161 + 1)^2$.

On a indiqué, en caractère gras, les nombres premiers obtenus comme facteur d'une décomposition effective. Leur fréquence augmente naturellement, dans le prolongement de la table. On peut même trouver une suite de valeurs $F(x)$, en nombre H , arbitrairement grand, dont aucune ne soit un nombre premier.

Il suffit de prendre x compris entre P et $P + H$, le nombre P étant le produit des facteurs premiers qui divisent les H premières valeurs $|F(c)|$. Il est manifeste que chacune des valeurs $F(x)$, ainsi considérées est divisible par au moins un de ces nombres premiers, sans lui être égal (H étant pris au moins égal à r).

Cependant on ne peut pas affirmer qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $F(x)$ qui soient des nombres premiers.

Le *tableau VIII* donne *trois autres exemples*, de types différents, limités chacun aux soixante premières valeurs des trinômes.

Pour le trinôme, de discriminant D positif, impair;

$$F(x) = x^2 + x - 109; \quad D = 347 = (-19) \times (-23);$$

les *vingt-huit premières valeurs sont des nombres premiers*.

Pour chacune d'elles la deuxième racine est supérieure à 27;

(pour $F(9) = -19$, et $F(11) = +23$, qui sont diviseurs du discriminant, les deux progressions sont confondues).

Dans les dix-neuf valeurs suivantes, seize *sont des nombres premiers*, les trois autres étant des produits de nombres premiers déjà obtenus :

$$F(28) = 19 \times 37; \quad F(34) = 23 \times 47; \quad F(45) = 37 \times 53.$$

(Le raisonnement fait par récurrence dans l'exemple précédent reste valable.)

La valeur suivante $F(47)$ est divisible par 19; mais le quotient est un nouveau nombre premier, ou de racine minimum 47.

Tous les *quotients* des valeurs restantes sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Pour le trinôme de discriminant D positif, multiple de 4 :

$$F(x) = x^2 - 83; \quad D = 332 = (-4) \times (-83)$$

2 étant diviseur du discriminant, toutes les valeurs, pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *vingt-quatre premières valeurs* sont des *nombres premiers* ou des *doubles de nombres premiers*. Toutefois deux facteurs premiers se trouvent deux fois et un d'eux est égal à 1 :

$$\mathbf{17} = |F(7)| : 2 = F(10); \quad \mathbf{19} = |F(8)| = F(11) : 2; \\ \mathbf{1} = |F(9)| : 2.$$

Dans les vingt valeurs suivantes: *treize sont des nombres premiers* ou des *doubles de nombres premiers*; les sept autres sont des produits ou des doubles de produits des nombres premiers impairs, précédemment obtenus.

Tous les quotients des valeurs restantes de la table, au-delà de $F(43)$, qui sont différents de 1 et de 2, sont des nombres premiers.

Pour le trinôme de discriminant négatif, multiple de 4 :

$$F(x) = x^2 + 37; \quad D = -148 = (-4) \times (+37);$$

2 est encore diviseur du discriminant; toutes les valeurs pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *dix-huit premières valeurs*, ou leurs *moitiés*, sont des *nombres premiers*. Dans les *trente-huit valeurs* suivantes, *vingt-neuf* sont des *nombres premiers* ou des *doubles de nombres premiers*; les neuf autres, ou leurs *moitiés* sont des produits des nombres premiers impairs déjà obtenus.

TABLEAU VIII.

$F(x) = x^2 + x - 109;$ $D = (-19) \times (-23)$			$F(x) = x^2 - 83;$ $D = (-4) \times (-83)$			$F(x) = x^2 + 37;$ $D = (-4) \times (+37)$			
c	F(c)	c	F(c)	c	F(c)	c	F(c)	c	F(c)
0	-109	30	821	0	—	30	19×43	0	37
1	-107	31	823	1	-2×41	31	2×439	1	2×19
2	-103	32	947	2	—	32	941	2	41
3	-97	33	1013	3	-2×37	33	2×503	3	2×23
4	-89	34	23×47	4	—	34	29×37	4	53
5	-79	35	1151	5	-2×29	35	2×571	5	2×31
6	-67	36	1223	6	—	36	1213	6	73
7	-53	37	1297	7	-2×17	37	2×643	7	2×43
8	-37	38	1373	8	—	38	1361	8	101
9	-19	39	1451	9	-2×1	39	2×719	9	2×59
10	+	40	1531	10	+	40	37×41	10	137
11	23	41	1613	11	2×19	41	2×17×47	11	2×79
12	47	42	1697	12	61	42	41×41	12	181
13	73	43	1783	13	2×43	43	2×883	13	2×103
14	101	44	1871	14	113	44	17×109	14	233
15	131	45	37×53	15	2×71	45	2×971	15	2×131
16	163	46	2053	16	173	46	19×107	16	293
17	197	47	19×113	17	2×103	47	2×1063	17	2×163
18	233	48	2243	18	241	48	2221	18	19×19
19	271	49	2341	19	2×139	49	2×19×61	19	2×199
20	311	50	2441	20	317	50	2417	20	19×23
21	353	51	2543	21	2×179	51	2×1259	21	2×239
22	397	52	2647	22	401	52	2621	22	521
23	443	53	2753	23	2×223	53	2×29×47	23	2×283
24	491	54	2861	24	17×29	54	2833	24	613
25	541	55	2971	25	2×271	55	2×1471	25	2×331
26	593	56	3083	26	593	56	43×71	26	23×31
27	647	57	23×139	27	2×17×19	57	2×1583	27	2×383
28	19×37	58	3313	28	701	58	17×193	28	821
29	761	59	47×73	29	2×379	59	2×1699	29	2×439

(à suivre)