40. Idéaux semi réduits.

40. Idéaux semi réduits.

Pour « étendre » la définition des idéaux réduits, on peut d'abord déduire de la propriété caractéristique, établie ci-dessus (**38**), une remarque complémentaire.

Dans un corps réel, *un idéal réduit* $\mathbf{M} = (m, \theta-\bar{c})$ *a, au moins, deux racines distinctes, qui donnent à* $F(x)$ *des valeurs négatives.*

Pour l'idéal réduit **M**, de racine minimum $\bar{c}$, la somme:

$$F(\bar{c}+m)+F(\bar{c}-m) = 2[F(\bar{c})+m^2]$$

n'est pas positive, puisque $F(\bar{c})$ est négative et m^2 au plus égal à $|F(\bar{c})|$. Il en résulte que l'une au moins des valeurs $F(\bar{c}+m)$, et $F(\bar{c}-m)$, qui ne peuvent être nulles, est négative, en même temps que $F(\bar{c})$. Comme $\bar{c}+m$ et $\bar{c}-m$ sont différents de $\bar{c}$, la propriété est établie.

Ceci suggère la définition suivante: Définition. — Dans un corps quadratique réel, *un idéal canonique est* **semi réduit**, *lorsqu'il a*, au moins, *deux racines distinctes, qui donnent des valeurs négatives à* $F(x)$ *:*

$$\mathbf{M} = (m, \ \theta-c_1) = (m, \ \theta-c_2); \quad c_1-c_2 \equiv 0, \ (\text{mod. } m); \\ c_1 \neq c_2; \quad F(c_1) < 0, \quad F(c_2) < 0.$$

En particulier, un idéal réduit est, a fortiori, semi réduit. *L'idéal* $\mathbf{M}'$, *conjugué, d'un idéal* **M** *semi réduit, est aussi semi réduit*, car les racines $S-c_1$ et $S-c_2$, de l'idéal $\mathbf{M}'$, donnent à $F(x)$, les mêmes valeurs négatives, que les racines c_1 et c_2, de **M**.

Pour un idéal semi réduit, il y a ainsi plusieurs (2 ou plus) termes successifs de la progression arithmétique des racines qui donnent une valeur négative à $F(x)$; ils comprennent la racine minimum $\bar{c}$; ils sont en nombre fini [contenus entre les zéros irrationnels, négatif et positif, de $F(x)$]; et ils ont deux termes extrêmes. Ceci suggère la définition générale suivante.

Définition. — Dans un corps quadratique réel, *on appelle* **racine initiale** et **racine finale**, d'un idéal canonique **M**, *la plus* *petite* (ou la première) *et la plus grande* (ou la dernière) *des racines*, s'il en existe, *qui donnent une valeur négative au polynôme fondamental* $F(x)$.

Elles sont caractérisées par l'équivalence de conditions:

$$F(c) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c_i \text{ initiale} \leqslant c \leqslant c_f \text{ finale}\};$$

ce qui est équivalent à la proposition contraposée ($F(c)$ ne pouvant être nul):

$$F(c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c < c_i \text{ initiale, } ou\ c > c_f \text{ finale}\}$$

Les racines initiale et finale de l'idéal $\mathbf{M}'$, conjugué d'un idéal $\mathbf{M}$, sont respectivement les racines conjuguées:

$$c_i' = S—c_f, \qquad c_f' = S—c_i,$$

des racines finale et initiale de $\mathbf{M}$.

Pour un idéal semi réduit, les racines initiale et finale existent et sont distinctes. En outre le nombre entier $(2c—S)$ est
positif, pour la racine finale: $2c_f—S > 0$;
négatif, pour la racine initiale: $2c_i—S < 0$;
(il n'est pas nul).

La différence $c_f—c_i$ est positive et multiple de m, en sorte que $c_f—m \geqslant c_i$ et $c_i+m \leqslant c_f$ donnent des valeurs négatives à $F(x)$. Il en est de même des racines conjuguées:

$$F(S—[c_f—m]) = F(c_f—m) < 0; \qquad F(S—[c_i+m]) = F(c_i+m) < 0.$$

Donc $S—c_f+m$ et $S—c_i—m$ sont, tous deux, inférieurs à c_f+m et supérieurs à $c_i—m$ (qui donnent des valeurs positives à $F(x)$). Il en résulte:

$$S—c_f+m < c_f+m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_f—S > 0;$$
$$S—c_i—m > c_i+m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_i—S < 0.$$

41. Couple d'idéaux associés semi réduits.

Les idéaux semi réduits se présentent par couples d'idéaux associés relativement à une racine (**26**), aussi bien initiale que finale. Pour les idéaux d'un tel couple on peut en effet donner