Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Kapitel: 43. Idéaux semi réduits remarquables.

Autor: Châtelet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

Un **idéal** (canonique) **semi réduit M**, de racine finale c, est caractérisé par:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta - c) = (m,\ \theta - c_1); \quad c_1 \equiv c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$0 < 2c - S; \quad F(c) = -m \times n; \quad |m - n| < 2c - S [\text{ou } (m+n)^2 < D]$$

Son **idéal associé N** (relativement à sa racine finale c), qui est aussi semi réduit, est:

$$\mathbf{N} = (n,\ \theta - c) = (n,\ \theta - c_2); \quad c_2 \equiv c, \quad (\text{mod. } n).$$

Son **idéal conjugué M'**, qui est aussi semi réduit, de même norme et de racine finale c', est:

$$\mathbf{M}' = (m,\ \theta - c'); \quad c' \equiv S - c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$F(c') < 0 < F(c' + m);$$

on peut évidemment remplacer la racine finale c' par tout entier c'_1, congru à c' (ou à $S - c$), mod. m.

43. Idéaux semi réduits remarquables.

Par analogie avec la notion des idéaux réduits remarquables dans un corps imaginaire (**29**), on peut donner les définitions suivantes.

Définitions. — Dans un corps quadratique réel, *parmi les idéaux semi réduits* (**42**), on peut **remarquer**, ou appeler **remarquables**:

1. un idéal qui est double (7) et qui est ainsi **semi réduit double**; il est égal à son conjugué.

2. un idéal qui est réfléchi, ou égal à son associé relativement à sa racine finale et qui est ainsi **semi réduit réfléchi** (puisque la différence des normes des idéaux associés qui est nulle est inférieure à $2c - S$, qui ne l'est pas).

Théorème d'existence d'un idéal semi réduit double. — Pour qu'un idéal soit *semi réduit double*, il faut et il suffit que *sa norme m soit un diviseur du discriminant D et vérifie les comparaisons*:

1. Si *D est impair*, ou si $D = 4d$, *d impair et m pair*: $m^2 < D$.

2. Si $D = 4d$ et *m diviseur de d*: $m^2 < d = D:4$.

Comme D ne peut avoir d'autre facteur carré que 4 (éventuellement), m^2 ne peut être égal, ni à D, ni à $d = D:4$ (il n'y a pas de corps réel, de discriminant égal à 4).

Pour qu'un idéal canonique soit double (**7**), il faut et il suffit que sa norme divise le discriminant; c'est la conséquence de l'étude de la congruence fondamentale (**6**). La condition supplémentaire de semi réduction résulte de l'examen des deux cas.

Dans le *premier cas*, m ne divisant pas $D:4$, on utilise l'expression du polynôme:

$$4F(x) = (2x - S)^2 - D;$$

on obtient des zéros conjugués, mod. m:

$$c = (S+m):2 \quad c' = S - c = (S-m):2; \qquad (c' = c - m);$$

qui sont des *racines consécutives* de l'idéal, de norme m, pour lesquelles les valeurs du polynôme sont égales:

$$4F(c) = 4F(c') = m^2 - D.$$

Si $m^2 < D$, ces deux valeurs sont négatives, c'est la propriété caractéristique de semi réduction (**40**) de l'idéal, de norme m et de racines c ou c'.

Si $m^2 > D$, les deux racines c et c' et tous les autres termes de la progression:

$$c' - \lambda m; \; c + \lambda m; \; \lambda \text{ entier positif}$$

donnent à $F(x)$ des valeurs positives; l'idéal ne peut être réduit.

Dans le *deuxième cas*, on utilise l'expression du polynome:

$$F(x) = x^2 - d; \qquad D = 4d.$$

m étant un diviseur de d, les entiers $-m$, 0, $+m$ sont des racines consécutives de l'idéal double, de norme m.

Si $m^2 < d$, les valeurs:

$$F(-m) = F(+m) = m^2 - d,$$

sont négatives, de même que $F(0) = -d$; l'idéal est semi réduit.

Si $m^2 > d$, la valeur $F(0) = -d$ est encore négative, mais toutes les autres valeurs $F(\lambda m)$, pour tout entier λ non nul, sont positives, il n'existe pas de racines consécutives de l'idéal qui donnent à $F(x)$ des valeurs négatives; l'idéal n'est pas semi réduit.

Théorème d'existence d'un idéal semi réduit réfléchi. — Pour qu'un idéal, de norme m, soit *semi réduit réfléchi, il faut et il suffit que le discriminant D soit égal à la somme des carrés de deux nombres entiers*, dont un égal à $2m$:

$$D = a^2+4m^2 \begin{cases} a \text{ impair, si } D \text{ est impair;} \\ a \text{ pair, si } D \text{ est multiple de 8.} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'idéal semi réduit réfléchi, dans un corps dont le discriminant est quadruple d'un nombre impair ($D = 4d$; d impair).

Ainsi qu'il a été déjà vérifié (**16**), la condition de décomposition est manifestement nécessaire et suffisante pour que l'idéal:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta-c); \qquad 2c-S = a;$$

soit réfléchi, relativement à la racine c, qui donne à $F(x)$ la valeur négative $-m^2$.

Il n'y a pas de condition de comparaison: les deux facteurs de la décomposition de $-F(c)$ étant égaux, leur différence est nulle, donc inférieure à $2c-S = a$, qui ne peut être nul.

Exemples. — Dans le corps de discriminant impair $145 = 5\times 29$ (tableau XXII), les facteurs du discriminant D, de carré au plus égal à D sont 1 et 5, qui sont les normes des deux idéaux semi réduits doubles:

$$(\mathbf{1},\ \theta) \qquad (\mathbf{5},\ \theta-2).$$

Aux deux décompositions du discriminant:

$$145 = 9^2+4\times 4^2, \qquad 145 = 1^2+4\times 6^2,$$

correspondent les idéaux semi réduits réfléchis:

$$(\mathbf{4},\ \theta-4) = (\mathbf{4},\ \theta); \qquad (\mathbf{6},\ \theta),$$

de racines finales respectives 4 et 0.

Les idéaux conjugués:

$$(\mathbf{4},\ \theta+5) = (\mathbf{4},\ \theta-3), \qquad (\mathbf{6},\ \theta+1) = (\mathbf{6},\ \theta-5),$$

également semi réduits, sont réfléchis, mais relativement à leurs racines *initiales* —5 et —1 (tableau XXIII).

Dans le corps de discriminant pair $232 = 8\times 29 = 4\times 58$ (tableau XXII), la congruence fondamentale, qui a une racine double, mod. 2, est impossible mod. 4. Les normes des idéaux doubles ne peuvent être divisibles par 4 et sont des diviseurs de 58. Les seuls dont le carré est inférieur à 58 sont 1 et 2, qui sont les normes des idéaux réduits doubles $(\mathbf{1},\ \theta)$ et $(\mathbf{2},\ \theta)$.

Aux deux décompositions du discriminant:

$$232 = 6^2+4\times 7^2; \qquad 232 = 14^2+4\times 3^2;$$

(qui sont composées des mêmes termes, mais où le quadruple du carré mis en évidence n'est pas le même) correspondent les idéaux semi réduits réfléchis:

$$(\mathbf{7},\ \theta-3), \qquad (\mathbf{3},\ \theta-7) = (\mathbf{3},\ \theta-1),$$

de racines finales respectives 3 et 7. Les idéaux conjugués sont encore en évidence dans le tableau XXIII.

L'*idéal unité* est, dans tous les cas *un idéal semi réduit double*, sa norme 1 est diviseur de D comme de $D:4$ et son carré est inférieur à cette valeur. Sa racine finale est le plus grand entier c, qui donne à $F(x)$ une valeur négative; son idéal associé est l'idéal principal $(-F(c),\ \theta-c) = (\theta-c)$.

Si cet entier c donne à $F(x)$ la valeur —1, l'idéal associé est égal à l'idéal unité, qui est alors, à la fois, semi réduit double et réfléchi.

44. Cycles d'idéaux semi réduits.

On va établir que, dans un corps quadratique réel, les idéaux semi réduits peuvent être *répartis en* (un ou plusieurs) *cycles*, d'idéaux congrus entre eux. Par cycle, on entend un système de termes, en nombre fini, *ordonnés circulairement*.

A cet effet on définit et on justifie la relation d'ordre, puis la répartition qui en résulte; on vérifie la congruence, ou l'appartenance à une même classe des idéaux d'un cycle.