

# 48. Diviseurs de l'unité.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de  $\gamma_{j+1}$  à la base des  $\alpha$  entraînerait :

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \Rightarrow \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des  $\gamma$ .

L'égalité des valeurs absolues  $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$  entraîne celle des conjugués  $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$ , puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable : si un idéal  $\mathbf{M} = (m, \theta - c)$ , semi réduit, de racine finale  $c$ , est congru aux idéaux  $\mathbf{M}_i$  d'un cycle et notamment à  $\mathbf{M}_0$ , dans lequel est construite une suite de bases  $\alpha_i \alpha_{i+1}$ , il existe un élément  $\rho$ , qui peut être choisi positif, tel que  $(\rho) \times \mathbf{M}$  soit égal à  $\mathbf{M}_0$ . Le couple d'éléments :

$$\gamma_j = \rho \times m \quad \gamma_{j+1} = \rho \times (\theta - c)$$

est une base arithmétique libre de  $\mathbf{M}_0$ , qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite :

$$\rho \times m = \alpha_i = \rho_i \times m_i \quad \rho \times (\theta - c) = \alpha_{i+1} = \rho_i (\times \theta - c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de  $\theta$  montre que :

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

*Tout idéal  $\mathbf{M}$ , semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.*

#### 48. Diviseurs de l'unité.

THÉORÈME des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales :

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i); \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par  $+1$  et  $-1$  des puissances  $\omega^\lambda$ , (d'exposants  $\lambda$  entiers quelconques) de :

$$\omega = [\Pi(\theta - c_i)] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1.$$

*Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.*

On a déjà indiqué (Théorème I des diviseurs de l'unité, 45) que les éléments  $+\omega^\lambda$  et  $-\omega^\lambda$  sont des diviseurs de l'unité. Réciproquement, les opposés de diviseurs de l'unité étant encore des diviseurs de l'unité, on peut se borner à chercher ceux qui sont positifs.

On considère un cycle, engendré par un idéal semi réduit  $\mathbf{M}_0 = (m_0, \theta - c_0)$ , dans lequel on a construit une suite de bases de termes positifs  $\alpha_i$ . Le produit  $\eta \times \mathbf{M}_0$ , de cet idéal par un diviseur positif  $\eta$ , de l'unité, lui reste égal et les éléments positifs  $\eta \times m_0$  et  $\eta \times (\theta - c_0)$  en constituent une base arithmétique libre. Comme cette base vérifie les relations:

$$\begin{aligned} [\eta \times (\theta - c_0)] : (\eta \times m_0) &= (\theta - c_0) : m_0 < 1; \\ [\eta' \times (\theta' - c_0)] : (\eta' \times m_0) &= (\theta' - c_0) : m_0 < -1; \end{aligned}$$

elle est égale à l'une des bases de la suite, de sorte que:

$$\eta \times (\theta - c_0) = \alpha_{i+1} = \rho_i \times (\theta - c_i);$$

ce qui entraîne:

$$\eta = \rho_i, \quad c_0 = c_i \Rightarrow i = \lambda h; \quad \eta = \omega^\lambda; \quad \lambda \text{ entier.}$$

La démonstration montre notamment que *la valeur de l'expression qui donne  $\omega$  est indépendante du cycle utilisé.* On peut obtenir cette valeur par un calcul de multiplication, dans le corps quadratique (en utilisant la relation  $\theta^2 = -S\theta + N$ ), notamment en cherchant de proche en proche les valeurs  $\alpha_{i+1} = \alpha_i \times (\theta - c_i) : m_i$ .

On peut aussi utiliser une relation linéaire qui existe entre trois termes successifs de la suite des  $\alpha_i$ :

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i-1} - q_i \times \alpha_i; \quad q_i = (c_i + c_{i-1} - S) : m_i.$$

Cette égalité résulte de la construction des idéaux successifs du cycle: l'idéal  $\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i)$  est le conjugué de l'associé de son précédent  $\mathbf{M}_{i-1}$ , de sorte que:

$$c_i + c_{i-1} \equiv S, \pmod{m_i}; \quad \text{ou} \quad c_i = S - c_{i-1} + q_i \times m_i;$$

$q_i$  étant le nombre entier positif, indiqué plus haut.

En transportant cette valeur dans la relation de récurrence multiplicative des  $\alpha_i$ , on obtient:

$$\alpha_{i+1} = [(\theta - c_i) : m_i] \times \alpha_i = [(\theta - S + c_{i-1}) : m_i] \times \alpha_i - q_i \times \alpha_i.$$

Mais le premier terme du second membre est égal à  $\alpha_{i-1}$ , on le vérifie en exprimant  $\alpha_i$ , par la relation de récurrence; le terme devient:

$$[(-\theta' + c_{i-1}) : m_i] \times [(\theta - c_{i-1}) : m_{i-1}] \times \alpha_{i-1}$$

et le facteur de  $\alpha_{i-1}$  est égal à:

$$-[(\theta' - c_{i-1}) \times (\theta - c_{i-1})] : (m_i \times m_{i-1}) = [-F(c_{i-1})] : (m_i \times m_{i-1}) = 1$$

la dernière égalité résulte de l'association de  $\mathbf{M}_{i-1}$  et du conjugué de  $\mathbf{M}_i$ .

La relation de récurrence linéaire peut être mise sous forme matricielle. Les bases, disposées en colonnes (comme il a été fait ci-dessus; 9), vérifient l'égalité:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i-1} \end{vmatrix}; \quad q_i = (c_{i-1} + c_i - S) : m_i.$$

Ceci appliqué à  $h$  bases consécutives (par exemple aux  $h$  premières) donne une propriété de  $\omega$ :

$$\begin{vmatrix} \omega \times \alpha_1 \\ \omega \times \alpha_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{h+1} \\ \alpha_h \end{vmatrix} = \Pi \left( \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \times \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{vmatrix};$$

les matrices sont prises de  $i = 1$  à  $i = h$ , mais disposées de *droite à gauche*. Toutes les matrices multipliées ayant un déterminant égal à  $-1$ , la matrice produit a un déterminant égal à  $-1$  ou à  $+1$ , suivant que  $h$ , nombre d'idéaux du cycle, est impair, ou pair. Ce produit est donc de la forme:

$$\Pi \left( \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} U & V \\ V' & U' \end{vmatrix}; \quad U \times U' - V \times V' = \varepsilon(+1 \text{ ou } -1).$$

La relation obtenue entraîne:

$$\begin{vmatrix} \omega \times \alpha_1 \\ \omega \times \alpha_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & V \\ V' & U' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{déterminant} \begin{vmatrix} U - \omega V \\ V' & U' - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Il en résulte que le diviseur de l'unité  $\omega$  vérifie l'équation du second degré:

$$\omega^2 - (U + U') \times \omega + \varepsilon = 0;$$

et la norme  $\omega \times \omega'$  est égale à  $\varepsilon$ ; sa valeur absolue est 1 et son signe est  $-$  ou  $+$ , suivant que  $h$  est impair ou pair.

Il en résulte que *tous les cycles*, d'un même corps quadratique, *ont la même parité du nombre de leurs idéaux*.

Les matrices multipliées étant symétriques (égales respectivement à leurs transposées), la transposée de leur produit est égale à leur produit, mais disposé dans l'ordre inverse:

$$\Pi \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & V' \\ V & U' \end{vmatrix} ; i \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

(On obtiendrait d'ailleurs ces produits en disposant les termes des bases en lignes.) L'équation en  $\omega$  reste la même.

EXEMPLES. — On a indiqué ci-dessus (46) le calcul de  $\omega$  dans le corps de discriminant 145, en utilisant la relation de récurrence (multiplicative) entre deux  $\alpha_i$  successifs. L'emploi de la récurrence linéaire conduit aux calculs suivants (pour le même cycle):

$$\begin{array}{l} \mathbf{M}_0 = (1, \theta - 5) \\ q_i = \dots \dots \dots \\ \alpha_0 = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_1 = (6, \theta - 0) \\ (5 + 0 + 1) : 6 = 1 \\ \alpha_1 = \theta - 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_2 = (6, \theta - 5) \\ (0 + 5 + 1) : 6 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_0 - 1 \times \alpha_1 \\ \quad - \theta + 6 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_3 = (1, \theta - 5) \\ (5 + 5 + 1) : 1 = 11 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \times \alpha_2 \\ \quad 2\theta - 11 = \omega \end{array} \right.$$

Le produit des matrices ( $i$  de 1 à 3, de gauche à droite) est:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 2 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} ;$$

l'équation vérifiée par  $\omega$  est:

$$\omega^2 + 24\omega - 1 = 0;$$

ce qu'on peut constater directement.

Le tableau XXV donne encore un exemple de calculs des idéaux semi réduits dans le corps de discriminant 377. Il y a 2 cycles de 4 et

de 6 idéaux. Il indique, pour le premier de ces cycles, le calcul des  $\alpha_i$  et du diviseur de l'unité  $\omega$ , par récurrence multiplicative et par récurrence linéaire, ainsi que le produit des substitutions linéaires (ou des matrices unimodulaires).

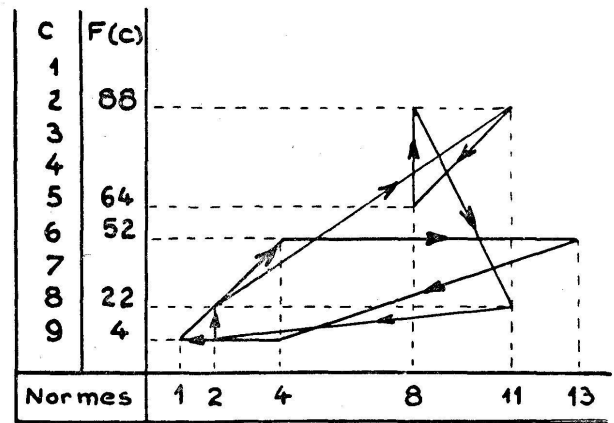
La norme de  $\omega$  est  $+1$ , puisque les nombres d'idéaux de chaque cycle sont pairs.

TABLEAU XXV.

Exemples de calculs de cycles et de diviseurs de l'unité.

$$F(x) = x^2 + x - 94; \quad D = 377 = 13 \times 29$$

$c$	$\frac{2c}{-S}$	$-F(c)$	Idéaux semi réduits
0	1	$94 = 2 \times 47$	
1	3	$92 = 2^2 \times 23$	
2	5	$88 = 2^3 \times 11$	$(8, \theta-2) \times (11, \theta-2)$
3	7	$82 = 2 \times 41$	
4	9	$74 = 2 \times 37$	
5	11	$64 = 2^6$	$(8, \theta-5) \times (8, \theta-5)$
6	13	$52 = 2^2 \times 13$	$(4, \theta-6) \times (13, \theta-6)$
7	15	$38 = 2 \times 19$	
8	17	$22 = 2 \times 11$	$(2, \theta-8) \times (11, \theta-8)$ $(2, \theta-9) \times (2, \theta-9)$
9	19	$4 = 2^2$	$(1, \theta-9) \times (4, \theta-9)$



$$\begin{array}{l}
 (1, \theta-9) \rightarrow (4, \theta-6) \quad (2, \theta-8) \rightarrow (11, \theta-2) \rightarrow (8, \theta-5) \\
 \uparrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \downarrow \\
 (4, \theta-9) \leftarrow (13, \theta-6) \quad (2, \theta-9) \leftarrow (11, \theta-8) \leftarrow (8, \theta-2)
 \end{array}$$

Calcul des diviseurs de l'unité.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{M}_0 = (1, \theta-9) \quad \mathbf{M}_1 = (4, \theta-6) \quad \mathbf{M}_2 = (13, \theta-6) \quad \mathbf{M}_3 = (4, \theta-9) \quad \mathbf{M}_0 = (1, \theta-9) \\
 q_i = \dots \dots \dots \left( \begin{array}{l} (9+6+1):4 = 4 \\ \alpha_0 = 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} (6+5+1):13 = 1 \\ \alpha_1 = (\theta-9) \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \alpha_1 \times (\theta-6):4 \\ \alpha_2 = \alpha_0 - 4\alpha_1 \\ -4\theta + 37 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} (6+9+1):4 = 4 \\ \alpha_2 \times (\theta-6):13 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \times \alpha_2 \\ 5\theta - 46 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} (9+9+1):1 = 19 \\ \alpha_3 \times (\theta-9):4 \\ \alpha_3 = \alpha_2 - 4 \times \alpha_3 \\ -24\theta + 221 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\left\| \begin{array}{cc} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -19 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 461 & -24 \\ -96 & 5 \end{array} \right\|$$

$$\omega^2 - 466\omega + 1 = 0.$$