Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 48. Diviseurs de l'unité.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de γ_{j+1} à la base des α entrainerait:

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des γ.

L'égalité des valeurs absolues $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$ entraîne celle des conjugués $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$, puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable: si un idéal $\mathbf{M} = (m, \theta—c)$, semi réduit, de racine finale c, est congru aux idéaux $\mathbf{M}_i$ d'un cycle et notamment à $\mathbf{M}_0$, dans lequel est construit une suite de bases $\alpha_i \, \alpha_{i+1}$, il existe un élément ρ, qui peut être choisi positif, tel que $(\rho) \times \mathbf{M}$ soit égal à $\mathbf{M}_0$. Le couple d'éléments:

$$\gamma_j = \rho \times m \quad \gamma_{j+1} = \rho \times (\theta—c)$$

est une base arithmétique libre de $\mathbf{M}_0$, qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite:

$$\rho \times m = \alpha_i = \rho_i \times m_i \quad \rho \times (\theta—c) = \alpha_{i+1} = \rho_i(\times \theta—c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de θ montre que:

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

Tout idéal **M**, *semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.*

48. Diviseurs de l'unité.

THÉORÈME des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \ \theta—c_i); \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par $+1$ *et* $—1$ *des puissances* ω^λ, (d'exposants λ entiers quelconques) *de*:

$$\omega = [\Pi(\theta—c_i)]:[\Pi m_i]; \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1.$$

Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.

On a déjà indiqué (Théorème I des diviseurs de l'unité, **45**) que les éléments $+\omega^\lambda$ et $-\omega^\lambda$ sont des diviseurs de l'unité. Réciproquement, les opposés de diviseurs de l'unité étant encore des diviseurs de l'unité, on peut se borner à chercher ceux qui sont positifs.

On considère un cycle, engendré par un idéal semi réduit $\mathbf{M}_0 = (m_0, \ \theta - c_0)$, dans lequel on a construit une suite de bases de termes positifs α_i. Le produit $\eta \times \mathbf{M}_0$, de cet idéal par un diviseur positif η, de l'unité, lui reste égal et les éléments positifs $\eta \times m_0$ et $\eta \times (\theta - c_0)$ en constituent une base arithmétique libre. Comme cette base vérifie les relations:

$$[\eta \times (\theta - c_0)] : (\eta \times m_0) = (\theta - c_0) : m_0 < 1;$$
$$[\eta' \times (\theta' - c_0)] : (\eta' \times m_0) = (\theta' - c_0) : m_0 < -1;$$

elle est égale à l'une des bases de la suite, de sorte que:

$$\eta \times (\theta - c_0) = \alpha_{i+1} = \rho_i \times (\theta - c_i);$$

ce qui entraîne:

$$\eta = \rho_i, \quad c_0 = c_i \quad \Rightarrow \quad i = \lambda h; \quad \eta = \omega^\lambda; \quad \lambda \text{ entier.}$$

La démonstration montre notamment que *la valeur de l'expression qui donne* ω *est indépendante du cycle utilisé.* On peut obtenir cette valeur par un calcul de multiplication, dans le corps quadratique (en utilisant la relation $\theta^2 = -S\theta + N$), notamment en cherchant de proche en proche les valeurs $\alpha_{i+1} = \alpha_i \times (\theta - c_i) : m_i$.

On peut aussi utiliser une relation linéaire qui existe entre trois termes successifs de la suite des α_i:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i-1} - q_i \times \alpha_i; \qquad q_i = (c_i + c_{i-1} - S) : m_i.$$

Cette égalité résulte de la construction des idéaux successifs du cycle: l'idéal $\mathbf{M}_i = (m_i, \ \theta - c_i)$ est le conjugué de l'associé de son précédent $\mathbf{M}_{i-1}$, de sorte que:

$$c_i + c_{i-1} \equiv S, \ (\text{mod. } m_i); \qquad \text{ou} \qquad c_i = S - c_{i-1} + q_i \times m_i;$$

q_i étant le nombre entier positif, indiqué plus haut.

En transportant cette valeur dans la relation de récurrence multiplicative des α_i, on obtient:

$$\alpha_{i+1} = [(\theta - c_i) : m_i] \times \alpha_i = [(\theta - S + c_{i-1}) : m_i] \times \alpha_i - q_i \times \alpha_i.$$

Mais le premier terme du second membre est égal à α_{i-1}, on le vérifie en exprimant α_i, par la relation de récurrence; le terme devient:

$$[(-\theta'+c_{i-1}):m_i]\times[(\theta-c_{i-1}):m_{i-1}]\times\alpha_{i-1}$$

et le facteur de α_{i-1} est égal à:

$$-[(\theta'-c_{i-1})\times(\theta-c_{i-1})]:(m_i\times m_{i-1}) = [-F(c_{i-1})]:(m_i\times m_{i-1}) = 1$$

la dernière égalité résulte de l'association de $\mathbf{M}_{i-1}$ et du conjugué de $\mathbf{M}_i$.

La relation de récurrence linéaire peut être mise sous forme matricielle. Les bases, disposées en colonnes (comme il a été fait ci-dessus; **9**), vérifient l'égalité:

$$\begin{Vmatrix}\alpha_{i+1}\\ \alpha_i\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}\alpha_i\\ \alpha_{i-1}\end{Vmatrix}; \quad q_i = (c_{i-1}+c_i-S):m_i.$$

Ceci appliqué à h bases consécutives (par exemple aux h premières) donne une propriété de ω:

$$\begin{Vmatrix}\omega\times\alpha_1\\ \omega\times\alpha_0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\alpha_{h+1}\\ \alpha_h\end{Vmatrix} = \Pi\left(\begin{Vmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\right)\times\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\end{Vmatrix};$$

les matrices sont prises de $i=1$ à $i=h$, mais disposées de *droite à gauche*. Toutes les matrices multipliées ayant un déterminant égal à -1, la matrice produit a un déterminant égal à -1 ou à $+1$, suivant que h, nombre d'idéaux du cycle, est impair, ou pair. Ce produit est donc de la forme:

$$\Pi\left(\begin{Vmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix}U & V\\ V' & U'\end{Vmatrix}; \quad U\times U'-V\times V' = \varepsilon(+1 \text{ ou } -1).$$

La relation obtenue entraîne:

$$\begin{Vmatrix}\omega\times\alpha_1\\ \omega\times\alpha_0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}U & V\\ V' & U'\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\end{Vmatrix} \Rightarrow \text{déterminant}\begin{vmatrix}U-\omega & V\\ V' & U'-\omega\end{vmatrix} = 0$$

Il en résulte que le diviseur de l'unité ω vérifie l'équation du second degré:

$$\omega^2 - (U+U')\times\omega+\varepsilon = 0;$$

et la norme $\omega\times\omega'$ est égale à ε; sa valeur absolue est 1 et son signe est — ou +, suivant que h est impair ou pair.

Il en résulte que *tous les cycles*, d'un même corps quadratique, *ont la même parité du nombre de leurs idéaux.*

Les matrices multipliées étant symétriques (égales respectivement à leurs transposées), la transposée de leur produit est égale à leur produit, mais disposé dans l'ordre inverse:

$$\Pi \begin{Vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} U & V' \\ V & U' \end{Vmatrix} ; \; i \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

(On obtiendrait d'ailleurs ces produits en disposant les termes des bases en lignes.) L'équation en ω reste la même.

Exemples. — On a indiqué ci-dessus (**46**) le calcul de ω dans le corps de discriminant 145, en utilisant la relation de récurrence (multiplicative) entre deux α_i successifs. L'emploi de la récurrence linéaire conduit aux calculs suivants (pour le même cycle):

$\mathbf{M}_0 = (1, \theta-5)$	$\mathbf{M}_1 = (6, \theta-0)$	$\mathbf{M}_2 = (6, \theta-5)$	$\mathbf{M}_0 = (1, \theta-5)$
$q_i = \ldots\ldots\ldots$	$(5+0+1):6 = 1$	$(0+5+1):6 = 1$	$(5+5+1):1 = 11$
$\alpha_0 = 1$	$\alpha_1 = \theta-5$	$\alpha_2 = \alpha_0 - 1\times\alpha_1$	$\alpha_3 = \alpha_1 - 1\times\alpha_2$
		$-\theta+6$	$2\theta-11 = \omega$

Le produit des matrices (i de 1 à 3, de gauche à droite) est:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -23 & 2 \\ 12 & -1 \end{Vmatrix};$$

l'équation vérifiée par ω est:

$$\omega^2+24\omega-1 = 0;$$

ce qu'on peut constater directement.

Le tableau XXV donne encore un exemple de calculs des idéaux semi réduits dans le corps de discriminant 377. Il y a 2 cycles de 4 et de 6 idéaux. Il indique, pour le premier de ces cycles, le calcul des α_i et du diviseur de l'unité ω, par récurrence multiplicative et par récurrence linéaire, ainsi que le produit des substitutions linéaires (ou des matrices unimodulaires).

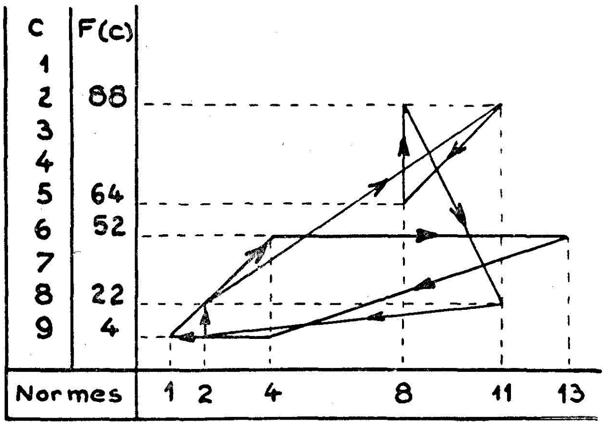
La norme de ω est $+1$, puisque les nombres d'idéaux de chaque cycle sont pairs.

TABLEAU XXV.

Exemples de calculs de cycles et de diviseurs de l'unité.

$$F(x) = x^2+x-94; \qquad D = 377 = 13\times 29$$

c	$\dfrac{2c}{-S}$	$-F(c)$	Idéaux semi réduits
0	1	$94 = 2\times 47$	
1	3	$92 = 2^2\times 23$	
2	5	$88 = 2^3\times 11$	$(8,\ \theta-2)\times(11,\ \theta-2)$
3	7	$82 = 2\times 41$	
4	9	$74 = 2\times 37$	
5	11	$64 = 2^6$	$(\mathbf{8},\ \theta-5)\times(\mathbf{8},\ \theta-5)$
6	13	$52 = 2^2\times 13$	$(4,\ \theta-6)\times(\mathbf{13},\ \theta-6)$
7	15	$38 = 2\times 19$	
8	17	$22 = 2\times 11$	$(2,\ \theta-8)\times(11,\ \theta-8)$
—			$(\mathbf{2},\ \theta-9)\times(\mathbf{2},\ \theta-9)$
9	19	$4 = 2^2$	$(\mathbf{1},\ \theta-9)\times(4,\ \theta-9)$



$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,\ \theta-9) & \rightarrow & (4,\ \theta-6) & \qquad & (2,\ \theta-8) & \rightarrow & (11,\ \theta-2) & \rightarrow & (8,\ \theta-5) \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow \\
(4,\ \theta-9) & \leftarrow & (13,\ \theta-6) & & (2,\ \theta-9) & \leftarrow & (11,\ \theta-8) & \leftarrow & (8,\ \theta-2)
\end{array}$$

Calcul des diviseurs de l'unité.

$\mathbf{M}_0 = (1,\theta-9)$	$\mathbf{M}_1 = (4,\theta-6)$	$\mathbf{M}_2 = (13,\theta-6)$	$\mathbf{M}_3 = (4,\theta-9)$	$\mathbf{M}_0 = (1,\theta-9)$
$q_i = \ldots\ldots\ldots$	$(9+6+1):4 = 4$	$(6+5+1):13 = 1$	$(6+9+1):4 = 4$	$(9+9+1):1 = 19$
$\alpha_0 = 1$	$\alpha_1 = (\theta-9)$	$\alpha_1\times(\theta-6):4$	$\alpha_2\times(\theta-6):13$	$\alpha_3\times(\theta-9):4$
		$\alpha_2 = \alpha_0-4\alpha_1$	$\alpha_3 = \alpha_1-1\times\alpha_2$	$\alpha_3 = \alpha_2-4\times\alpha_3$
		$-4\theta+37$	$5\theta-46$	$-24\theta+221$

$$\begin{Vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -19 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 461 & -24 \\ -96 & 5 \end{Vmatrix}$$

$$\omega^2-466\omega+1 = 0.$$