49. Les quatre types de cycles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

49. Les quatre types de cycles.

Le numérotage (par indice i, mod. h) des termes d'un cycle d'idéaux semi réduits permet d'établir aisément qu'il existe seulement 4 types de cycles. On indique d'abord leurs caractéristiques en les illustrant par des exemples déjà cités; la justification en est explicitée au numéro suivant.

1. *Le cycle contient un idéal semi réduit double et un idéal semi réduit réfléchi.* Il a alors un *nombre impair de termes* et contient leurs conjugués et leurs associés (relativement à la racine finale).

Pour le corps de discriminant 145 (tableaux XXII et XXIV), dans le cycle de trois idéaux:

$$(1,\ \theta-5) \rightarrow (6,\ \theta) \rightarrow (6,\ \theta-5);$$

le premier est double, le second est réfléchi ($F(0) = -6^2$).

De même dans le cycle de cinq idéaux:

$$(5,\ \theta-2) \rightarrow (6,\ \theta-3) \rightarrow (4,\ \theta-4) \rightarrow (4,\ \theta-3) \rightarrow (6,\ \theta-2)$$

le premier idéal est double (5 diviseur du discriminant), le troisième est réfléchi ($F(4) = -4^2$).

Dans le corps de discriminant $D = 232$ (mêmes tableaux), un cycle de 7 termes comprend un idéal double $(1,\ \theta-7)$ et un idéal réfléchi $(7,\ \theta-3)$. Un autre cycle de 5 termes comprend un idéal double $(2,\ \theta-6)$ et un idéal réfléchi $(3,\ \theta-7)$.

Dans ce type de cycles rentrent les *cycles d'un seul terme*, constitués par l'idéal unité, lorsqu'il est, à la fois double et réfléchi, ce qui se présente dans les cas signalés ci-dessus (**43** et **44**). Si le corps ne contient que ce seul cycle, il est principal et il présente le caractère trivial signalé ci-dessus (**38**); c'est le cas de 7 des corps du tableau XX; de discriminants:

5, 13, 29, 53, 173, 293 et 8.

2. *Le cycle contient deux idéaux semi réduits doubles.* Il a alors *un nombre pair de termes* et contient aussi leurs conjugués et leurs associés (relativement à la racine finale).

Dans le corps de discriminant 377 (tableau XXV), le cycle de quatre termes contient deux idéaux doubles, de normes 1 et 13, diviseurs du discriminant. Dans le graphique représentatif, ce sont les extrémités de côtés parallèles à l'axe des normes.

Un *cycle de deux termes* est nécessairement de ce type 2, les deux idéaux qui le constituent sont doubles.

En effet, les deux idéaux doivent être donnés par des décompositions:

$$(\theta - c) = (m,\ \theta - c)\times(n,\ \theta - c), \quad (\theta - c') = (m,\ \theta - c')\times(n,\ \theta - c')$$

et c, c' doivent être conjugués relativement à m et n et congrus suivant ces mêmes nombres qui sont par suite des normes d'idéaux doubles (donc diviseurs du discriminant).

Un tel cycle peut notamment contenir l'*idéal unité* (ce qui est une condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas d'autre cycle et que le corps soit principal). Il est alors obtenu par la décomposition de la dernière valeur négative de $F(c) = 1\times m$, lorsque m est diviseur du discriminant.

Cette circonstance se présente notamment dans les corps de discriminants:

$$21 = 3\times 7, \quad 77 = 7\times 11, \quad 437 = 19\times 23,$$

signalés ci-dessus (tableau XX) comme corps principaux triviaux et pour lesquels les décompositions des dernières valeurs négatives de $F(x)$ sont, respectivement:

$$F(1) = -3, \quad F(3) = -7, \quad F(9) = -19.$$

Cette circonstance se produit encore pour les corps dont le discriminant est de la forme $D = 4\times(c^2+2)$; ils contiennent un cycle de deux idéaux de normes 1 et 2, parmi les premiers desquels ceux de discriminants:

$$12 = 4.(1+2), \quad 24 = 4.(4+2), \quad 44 = 4.(9+2), \quad 152 = 4.(36+2),$$
$$332 = 4.(81+2), \quad 908 = 4.(225+2)$$

n'ont pas d'autres cycles, donc sont principaux. Il n'y a pas de corps de discriminants 72, 108, 684, 792, donnés par les valeurs de c: 4, 5, 13, 14. Les corps de discriminants 204, 264, 408, 492, 584; donnés par les valeurs de c: 7, 8, 10, 11, 12 contiennent d'autres cycles et ne sont pas principaux.

3. *Le cycle contient deux idéaux semi réduits réfléchis.* Il a *un nombre pair de termes* et contient leurs conjugués et leurs associés (relativement à la racine finale).

Dans le corps de discriminant 377 (tableau XXV), le cycle de six termes contient deux idéaux réduits réfléchis, donnés par les décompositions

$$(\theta-9) = (2,\ \theta-9)\times(2,\ \theta-9); \quad (\theta-5) = (8,\ \theta-5)\times(8,\ \theta-5);$$

dans le graphique représentatif, ce sont les origines des côtés parallèles à l'axe des racines.

Un cycle de ce type doit contenir au moins *quatre éléments et ne peut contenir d'idéal unité.* Il ne peut en exister dans un corps principal.

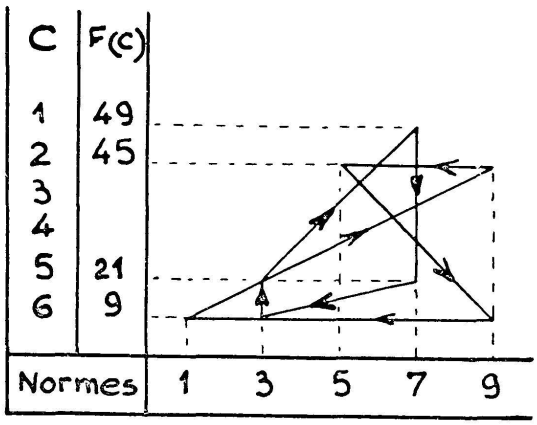
Le tableau XXVI donne un exemple de corps, de discriminant 205, qui contient deux cycles de quatre termes; l'un de type 2, l'autre de type 3.

Tableau XXVI.

Exemple de calculs de cycles.

$$F(x) = x^2+x-51; \qquad D = 205 = 5\times 41.$$

c	$2c-S$	$-F(c)$	Idéaux semi réduits
0	1	$51 = 3\times 17$	
1	3	$49 = 7^2$	$(\mathbf{7},\ \theta-1)\times(\mathbf{7},\ \theta-1)$
2	5	$45 = 3^2\times 5$	$(\mathbf{5},\ \theta-2)\times(9,\ \theta-2)$
3	7	$39 = 3\times 13$	
4	9	31	
5	11	$21 = 3\times 7$	$(3,\ \theta-5)\times(7,\ \theta-5)$
6	13	$9 = 3^2$	$(\mathbf{3},\ \theta-6)\times(\mathbf{3},\ \theta-6)$ $(\mathbf{1},\ \theta-6)\times(9,\ \theta-6)$



$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{1},\ \theta-6) & \rightarrow & (9,\ \theta-2) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (9,\ \theta-6) & \leftarrow & (\mathbf{5},\ \theta-2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbf{3},\ \theta-6) & \rightarrow & (3,\ \theta-5) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (7,\ \theta-5) & \leftarrow & (\mathbf{7},\ \theta-1) \end{array}$$

Les normes des idéaux remarquables sont en caractères gras.

4. *Le cycle ne contient pas d'idéaux remarquables*, notamment pas d'idéal unité. Les conjugués de ses idéaux forment un cycle différent, dont les idéaux sont respectivement associés à ceux du précédent. Les deux cycles peuvent être qualifiés *conjugués et associés;* ils définissent deux classes d'idéaux différentes conjuguées et inverses.

Les cycles des trois premiers types (précédents) sont conjugués et associés à eux-mêmes; ils définissent des classes doubles.

Le corps de discriminant 145 (tableaux XXII et XXIV) contient, en plus de deux cycles de type 1, deux cycles conjugués (et associés), de chacun trois idéaux:

$$(3, \theta-3) \to (8, \theta-4) \to (2, \theta-5); \quad (3, \theta-5) \to (2, \theta-4) \to (8, \theta-3).$$

Les conjugués des idéaux, d'indices 0, 1, 2, du premier cycle sont respectivement les idéaux d'indices 0, 2, 1, du second cycle (somme des indices congrue à 0, mod. 3); leurs associés sont respectivement les idéaux d'indices 2, 1, 0 (somme des indices congrue à —1, mod. 3). Les sens de circulation sur les deux schémas sont opposés.

50. Justification des types.

Pour établir que les quatres types de cycles sont les seuls possibles, on va étudier, comme il a été dit, le numérotage des éléments des cycles; en comparant deux cycles, non nécessairement différents, dont chacun contient les associés et par suite aussi les conjugués (dans un ordre différent) des termes de l'autre.

Théorème de la correspondance des indices. — Dans un corps réel, *pour que deux cycles* (éventuellement égaux), d'idéaux semi réduits, $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{N}_j$, *contiennent chacun les idéaux associés*, et, par suite aussi, conjugués, *des idéaux de l'autre*, *il suffit* (et il faut évidemment) :

qu'*il existe un terme* $\mathbf{M}_p$, de l'un, *et un terme* $\mathbf{N}_q$, de l'autre, *qui soient conjugués ;*

ou qu'*il existe un terme* $\mathbf{M}_p$ *et un terme* $\mathbf{N}_{q-1}$, *qui soient associés*, relativement à leur racine finale, commune.