NOTE I

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.08.2024**

Les seuls corps, à plus de deux classes doubles, dont le discriminant D est inférieur à 1000, sont les cinq corps dont les discriminants sont:

$$
\begin{aligned}
D &= 520 = 8\times5\times13\\
D &= 680 = 8\times5\times17\\
D &= 840 = 8\times3\times5\times7\\
D &= 780 = 4\times3\times5\times13\\
D &= 924 = 4\times4\times7\times11
\end{aligned}
$$

Le groupe des classes d'idéaux de chacun de ces corps est le produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2.

Le tableau XXX donne deux exemples de calcul des idéaux semi réduits et de vérification de la structure des groupes pour les corps dont les discriminants sont:

$1\,105 = 5\times13\times17$, qui a un cycle de sept idéaux (U) et trois cycles de onze idéaux;

$1\,365 = 3\times5\times7\times13$, qui a deux cycles de deux idéaux, un cycle de quatre idéaux et un cycle de six idéaux.

On peut encore généraliser la construction des exemples précédents, pour obtenir des corps contenant exactement n classes doubles d'idéaux.

NOTE I

La théorie des corps de nombres algébriques, et plus précisément l'étude des propriétés arithmétiques de leurs entiers, a pour origine des travaux de K. F. Gauss (1777-1855). Gauss a introduit la notion d'entier algébrique et établit les propriétés de divisibilité des entiers de quelques corps particuliers. Mais c'est seulement E. E. Kummer (1810-1893) qui a introduit la notion essentielle d'idéal, dans un anneau d'entiers algébriques, permettant d'obtenir des propriétés arithmétiques dans tout corps de nombres algébriques de degré fini. Cette notion a été précisée et développée, dans le cours du XIX^{e} siècle, surtout par l'école allemande: R. Dedekind (1831-1916), L. Kronecker

(1823-1891), H. MINKOWSKI (1864-1909). On peut également citer le Suisse A. HURWITZ (1859-1919) et le Français C. HERMITE (1822-1901).

En 1897, D. HILBERT (1862-1943) publiait, à la demande de la Deutsche Mathematiker Vereinigung, un rapport sur la théorie des corps de nombres algébriques. On pouvait alors estimer que les propriétés arithmétiques essentielles d'un corps de nombres algébrique de degré fini étaient obtenues. Mais HILBERT, utilisant largement ses propres travaux, ouvrait une nouvelle série de recherches en comparant l'arithmétique d'un corps de nombres algébriques à celle d'une de ses extensions abéliennes. Cette nouvelle étude, qui est habituellement appelée « théorie du corps des classes », a été poursuivie, pendant tout le XX^{e} siècle par de nombreux arithméticiens: P. FURTWANGLER, T. TAKAGI, C. CHEVALLEY, A. WEIL...

L'étude des corps quadratiques a tenu une place importante dans le développement de ces théories, autant comme exemple d'application des résultats généraux, que comme source de résultats particuliers suggérant de nouvelles recherches. C'est cette étude, et celle des corps circulaires, qui a le plus influencé les travaux de GAUSS, comme ceux d'HILBERT.

Le rapport d'HILBERT (*Jahresb. der Deutsche Mat. Ver.*, 1897; traduction française de A. LÉVY et Th. GOT, *Annales de la Fac. Sc. Toulouse*, 1913) consacre un chapitre (sur cinq) à la théorie des corps quadratiques. Le fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* de H. HERBRAND (« Le développement moderne de la théorie des corps algébriques », Paris, 1936) consacre également un chapitre à cette théorie.

Ces deux rapports sont très condensés et de lecture difficile. Mais il existe aussi des ouvrages plus élémentaires, contenant des expositions plus ou moins détaillées de l'arithmétique des corps quadratiques. La première partie du livre de J. SOMMER (*Introduction à la théorie des nombres algébriques*, traduction française de A. LÉVY, Paris, 1911) traite en détail de cette théorie, comme introduction à des études plus générales. Le livre de H. HECKE (*Algebraische Zahlen*, Leipzig, 1923) contient un chapitre où l'étude des corps quadratiques est présentée comme application et illustration de propriétés établies dans les chapitres précédents. Le livre récent de H. HASSE (*Zahlentheorie*, Berlin, 1959) contient un chapitre conçu dans le même esprit. Le livre plus élémentaire du même auteur (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlin, 1950) expose la théorie des corps quadratiques de façon plus détaillée et plus indépendante. D'autres traités (R. FUETER, *Synthetische Zahlentheorie*, Lepizig, 1919) utilisent plutôt les corps circulaires comme exemple de corps de nombres algébriques. Enfin certains (H. WEYL, *Algebraic theory of numbers*, Princeton, 1940; H. POLLARD, *The theory of algebraic numbers*, New York, 1950) ne consacrent que quelques lignes aux exemples particuliers de ces corps.

Une conférence d'Albert CHATELET (« L'arithmétique des idéaux », Conférences du Palais de la Découverte, Paris, 1950) étudie de façon détaillée et élémentaire deux exemples de corps quadratiques et compare l'arithmétique de leurs entiers et de leurs idéaux à celle des entiers rationnels.

Il faut enfin signaler que les exposés sur la théorie des formes quadratiques binaires sont essentiellement équivalents à un exposé sur l'arithmétique des corps quadratiques.

Le présent exposé précise et complète une méthode qui avait été esquissée par A. LÉVY au Congrès international de mathématiques réuni à Toronto (*Proc. Congress Toronto*, 1924, Tome 1, pp. 229-244). Cette méthode permet une construction effective du groupe des classes d'idéaux d'un corps quadratique, par des calculs élémentaires.

F. C.

NOTE II

La méthode utilisée ici, pour définir et construire un corps quadratique, a été choisie de telle sorte que les entiers (algébriques) du corps (**3**) puissent être engendrés de façon aussi simple que possible. C'est pour cette raison que l'entier caractéristique d est supposé dépourvu de facteurs carrés et que le polynome fondamental (**1**) se présente sous deux formes différentes, suivant que $d-1$ est ou n'est pas divisible par 4. Ce qui simplifie sensiblement l'exposé et les calculs ultérieurs.