§ 3. Der Chernsche Charakter.

Hilfe. Bott hat eine Homotopie-Äquivalenz zwischen Γ und $\Omega^2 \Gamma$ angegeben. Also gibt es die entsprechende Bijektion

$$K^{-n}(X, Y) \cong K^{-(n+2)}(X, Y), \quad n > 0. \tag{5}$$

Man kann zeigen, dass (5) die Gruppenstruktur respektiert. Also sind die Funktoren K^{-n} und $K^{-(n+2)}$ einander „gleich". Verlangt man (5) für alle ganzen Zahlen n, dann sind alle Funktoren K^n definiert. Die Funktoren K^n erfüllen alle Axiome (vgl. [4, 15] und auch den Vortrag von Eckmann auf diesem Symposium) bis auf das Dimensionsaxiom. Es ist ($n \geqq 0$)

$$K^{-n}(pt) = K^{-n}(pt^+, pt) =$$

$$K^0(S^n(pt^+), pt) = K^0(S^n, pt) = \pi_n(\Gamma).$$

Nach Bott (vgl. (5)) ist $\pi_n(\Gamma) = \mathbf{Z}$ für gerades n und gleich 0 für ungerades n. Also gilt (für alle n)

$$K^n(pt) \cong \mathbf{Z} \text{ für } n \text{ gerade}, \quad K^n(pt) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade}. \tag{6}$$

2.5. Da $K^n = K^{n+2}$, genügt es, die Funktoren K^0 und K^1 zu betrachten. Wir setzen

$$K^* = K^0 + K^1. \tag{7}$$

Für einen Raum X ist $K^0(X)$ ein kommutativer Ring. Die Multiplikation wird durch das Tensorprodukt von komplexen Vektorraum-Bündeln induziert. $K^*(X)$ ist über $\mathbf{Z}_2$ graduiert. (Man betrachte die Indices 0 und 1 in (7) als die Elemente von $\mathbf{Z}_2$.) Man kann die Ringstruktur von $K^0(X)$ so erweitern [4], dass $K^*(X)$ zu einem $\mathbf{Z}_2$-graduierten antikommutativen Ring wird. Für $a \in K^i(X)$ und $b \in K^j(X)$ ist $ab \in K^{i+j}(X)$, und es gilt

$$ab = (-1)^{ij}\, ba, \quad (i, j \in \mathbf{Z}_2).$$

§ 3. Der Chernsche Charakter.

3.1. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ Unbestimmte und $a_1, \ldots, a_k$ die elementarsymmetrischen Polynome in den $x_1, \ldots, x_k$. Es sei ferner s_j das Polynom in den $a_1, a_2, \ldots$, welches die Potenzsumme $x_1^j + \ldots + x_k^j$ ($k \geqq j$) durch die $a_1, a_2, \ldots$ ausdrückt. Man hat so (das k und die x_i kann man vergessen), eine wohlbestimmte Folge $s_1, s_2, \dots$ von Polynomen in den Unbestimmten $a_1, a_2, \dots$ mit ganzzahligen Koeffizienten

$$s_1 = a_1 , \quad s_2 = -2a_2 + a_1^2 , \dots ,$$

(1) $$s_n = (-1)^{n-1} na_n + \text{ zusammengesetzte Monome.}$$

3.2. Gegeben sei ein komplexes Vektorraum-Bündel ξ über X. (Wir machen die Voraussetzungen von 2.1.) Ordnet man jeder Zusammenhangskomponente von X die Dimension der Fasern von ξ über den Punkten dieser Zusammenhangskomponente zu, dann erhält man ein Element von $H^0(X; \mathbf{Z})$, das wir den Rang des Vektorraum-Bündels nennen ($rg(\xi)$). rg liefert einen Ring-Homomorphismus

(2) $$rg \colon K^0(X) \to H^0(X; \mathbf{Z}) .$$

Nun seien $c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$ die Chernschen Klassen von ξ. Dann können wir die Elemente

$$s_i(\xi) = s_i(c_1(\xi), \dots, c_i(\xi)) \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$$

betrachten ($i = 1, 2, \dots$). Wir führen nun rationale Koeffizienten ein, d.h. wir betrachten das Tensorprodukt

$$H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q} = H^*(X; \mathbf{Q}) .$$

Der Chernsche Charakter von ξ is so definiert:

(3) $$ch(\xi) = rg(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(\xi)}{j!} \in H^*(X; \mathbf{Q}) .$$

Der Chernsche Charakter ist offensichtlich der Exponentialfunktion nachgebildet. Fundamentale Eigenschaften der Chernschen Klassen implizieren [6, 12], dass

(4) $$ch(\xi' \oplus \xi'') = ch(\xi') + ch(\xi'') ,$$
$$ch(\xi' \otimes \xi'') = ch(\xi')\, ch(\xi'') ,$$

wobei es sich hier um die Whitneysche Summe, bzw. um das Tensorprodukt von Vektorraum-Bündeln handelt. Wegen (4) liefert ch einen Ring-Homomorphismus

$$ch\colon K^0(X) \to H^*(X; \mathbf{Q}) . \tag{5}$$

Offensichtlich ist auch $s_i(\xi)$ für $\xi \in K^0(X)$ wohldefiniert.

3.3. Der Ring $H^*(X; \mathbf{Q})$ ist ebenfalls über $\mathbf{Z}_2$-graduiert: $H^{ev}(X; \mathbf{Q})$ sei die direkte Summe der gerade-dimensionalen Cohomologiegruppen und $H^{od}(X; \mathbf{Q})$ die der ungerade-dimensionalen („Even" bzw. „Odd"). Dann ist

$$H^* = H^{ev} + H^{od} ,$$

wo H^{ev} die Rolle von K^0 und H^{od} die von K^1 in 2.5 übernommen hat. ch ist ein Ring-Homomorphismus von $K^0(X)$ in $H^{ev}(X; \mathbf{Q})$. Man kann ch zu einem Ring-Homomorphismus von $K^*(X)$ in $H^*(X; \mathbf{Q})$ erweitern, indem man verlangt, dass ch mit den Einhängungs-Isomorphismen verträglich ist. ch wird so zu einer natürlichen Transformation von K^* in H^* (rationale Koeffizienten), welche die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung und die multiplikative Struktur respektiert (vgl. [4] für Einzelheiten).

3.4. Es gibt eine Spektralsequenz [4], welche die in § 2 konstruierte Cohomologie-Theorie mit der üblichen (ganzzahligen) Cohomologie-Theorie in Verbindung setzt. Für endliche CW-Komplexe X, deren ganzzahlige Cohomologie keine Torsion hat, bricht die Spektralsequenz zusammen, und es ergibt sich folgender Satz.

Satz. — *Es sei X ein endlicher CW-Komplex, dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe. Dann ist*

$$ch\colon K^*(X) \to H^*(X; \mathbf{Q})$$

injektiv. $H^*(X; \mathbf{Z})$ und $K^*(X) \cong ch\, K^*(X)$ sind Unterringe von $H^*(X; \mathbf{Q})$. Diese beiden Unterringe stehen in folgender Beziehung:

a) Ist $a \in ch\, K^*(X)$, dann gehört die erste nicht verschwindende Komponente der rationalen Cohomologieklasse a zu $H^*(X; \mathbf{Z})$;

b) *Zu jedem* $x \in H^n(X; \mathbf{Z})$, *n beliebig, gibt es ein Element* $a \in ch\, K^*(X)$, *dessen erste nicht verschwindende Komponente gleich* x *ist.*

Eine Folgerung aus dem vorstehenden Satz ist, dass $K^*(X)$ und $H^*(X; \mathbf{Z})$ für torsionsfreies X (unter Erhaltung der $\mathbf{Z}_2$-Graduierungen) *additiv*-isomorph sind. Beide sind also freie abelsche Gruppen vom Range b, wo b die Summe der Bettischen Zahlen von X ist.

3.5. Aus dem vorstehenden Satz erhält man für $X = \mathbf{S}^{2n}$ folgenden Satz von Bott, der bei einem systematischen Aufbau der Theorie als direkte Folge der Bottschen Periodizität natürlich viel früher auftritt.

Satz. — *Ist* ξ *ein komplexes Vektorraum-Bündel über* $\mathbf{S}^{2n}$, *dann ist die Chernsche Klasse* $c_n(\xi) \in H^{2n}(\mathbf{S}^{2n}; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ *durch* $(n - 1)!$ *teilbar.*

Wegen $H^0(X; \mathbf{Z}) \subset ch\, K^0(X)$ und da $H^i(\mathbf{S}^{2n}; \mathbf{Q})$ für $0 < i < 2n$ verschwindet, ist nämlich $s_n(\xi)/n!$ nach 3.4 *a)* eine ganzzahlige Klasse. Also ist $c_n(\xi)$ wegen 3.1 (1) durch $(n - 1)!$ teilbar.

Aus dem Bottschen Satz kann man schliessen, dass $\mathbf{S}^m$ für $m \neq 1, 3, 7$ nicht parallelisierbar ist (1.4).

3.6. Es sei X nun eine *kompakte orientierte Mannigfaltigkeit.* Wir setzen sie nicht als differenzierbar voraus, nehmen aber im folgenden immer an, dass die auftretenden Mannigfaltigkeiten endliche CW-Komplexe sind, damit wir im Rahmen der von uns gewählten Kategorie von Räumen bleiben. *Wir setzen ferner in diesem Abschnitt* 3.6 *voraus, dass die ganzzahlige Cohomologie von X keine Torsion habe.* Dann können wir nämlich den Satz 3.4 anwenden.

Wir betrachten den rationalen Vektorraum $H^*(X; \mathbf{Q})$ und auf ihm die folgende rationale Bilinearform B: Für $x, y \in H^*(X; \mathbf{Q})$ ist $B(x, y)$ der Wert von xy auf dem orientierten Grundzyklus von X. (Dabei nehmen die Komponenten von xy, deren Dimension nicht gleich der von X ist, den Wert 0 an). Wir können die Bilinearform B auf die beiden „Gitter" $H^*(X; \mathbf{Z})$ und $ch\, K^*(X)$

beschränken. Die Beschränkungen bezeichnen wir mit B_H bzw. B_K. Es ist sinnvoll, von der Determinante von B_H bzw. B_K zu sprechen.

LEMMA. — *Es ist* $\det B_H = \det B_K = \pm 1$.

Aus dem Poincaréschen Dualitätssatz folgt, dass $\det B_H = \pm 1$. Wählt man in $H^*(X; \mathbf{Z})$ eine Basis $x_1, \ldots, x_b$ derart, dass $x_1, \ldots, x_{b_1}$ eine Basis von $H^1(X; \mathbf{Z})$ ist, $x_{b_1+1}, \ldots, x_{b_1+b_2}$ eine Basis von $H^2(X; \mathbf{Z})$ ist usw. ($b_i = i$-te Bettische Zahl, $b = b_1 + \ldots + b_n$; $\dim X = n$), dann wird B_H durch eine Matrix folgender Gestalt gegeben

$$\begin{pmatrix} O & & M_1 \\ & M_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ M_n & & O \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wo M_i eine quadratische ganzzahlige Matrix der Zeilenzahl $b_i = b_{n-i}$ ist. Nach 3.4 *b)* gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_b \in ch\, K^*(X)$, deren erste nicht verschwindende Komponenten gleich $x_1, \ldots, x_b$ sind. Die a_i bilden wegen 3.4 *a)* eine Basis des Gitters $ch\, K^*(X)$ und B_K wird durch eine Matrix folgender Gestalt gegeben

$$\begin{pmatrix} * & & M_1 \\ & M_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ M_n & & O \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wo * irgendwelche rationale (i.a. nicht ganze) Zahlen andeutet. Die Gleichheit von $\det B_H$ und $\det B_K$ folgt aus (6) und (7).

3.7. Wie in 3.6 nehmen wir an, dass X eine *kompakte, orientierte, torsionsfreie Mannigfaltigkeit* ist. Ein Element $m \in H^*(X; \mathbf{Q})$ heisst Multiplikator, wenn $B(a, m)$ für jedes $a \in ch\, K^*(X)$ ganzzahlig ist. Ein Multiplikator m heisst normiert, wenn seine 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und seine ungeradedimensionalen Komponenten verschwinden ($m \in H^{ev}(X; \mathbf{Q})$). Ein normierter Multiplikator ist ein invertierbares Element des Ringes $H^{ev}(X; \mathbf{Q})$.

LEMMA. — *Es gibt einen normierten Multiplikator m_0.*

Es sei $a_1, \ldots, a_b$ wie in 3.6 eine Basis von $ch\, K^*(X)$, wobei $a_b = x_b$ das zur Orientierung gehörige erzeugende Element von $H^n(X; \mathbf{Z})$ sei ($n = \dim X$). Die a_i können so gewählt werden, dass (in den Bezeichnungen von 3.6) $a_i \in ch\, K^0(X)$, wenn $\dim x_i$ gerade, und $a_i \in ch\, K^1(X)$, wenn $\dim x_i$ ungerade. Die a_i bilden eine $\mathbf{Q}$-Basis von $H^*(X; \mathbf{Q})$. Wegen der Poincaréschen Dualität gibt es ein $m_0 \in H^*(X; \mathbf{Q})$, so dass $B(a_i, m_0)$ gleich vorgegebenen Werten ist. Wir verlangen $B(a_b, m_0) = 1$, ferner $B(a_i, m_0)$ ganzzahlig ($i = 1, \ldots, b$) und $B(a_i, m_0) = 0$, wenn $\dim X - \dim x_i$ ungerade.

Dann ist m_0 in der Tat ein normierter Multiplikator.

Wir wählen nun einen normierten Multiplikator m_0 und definieren mit seiner Hilfe die Bilinearform B_{K,m_0} auf dem Gitter $ch\, K^*(X)$. Wir setzen

$$B_{K,m_0}(x, y) = B(x, y m_0), \qquad x, y \in ch\, K^*(X).$$

Diese Bilinearform nimmt (im Gegensatz zu B_K) *ganzzahlige* Werte an. Ihre Determinante ist gleich $\det B_k = \pm 1$, denn B_{K,m_0} lässt sich durch eine Matrix geben, die wieder von der Form (7) ist. Es folgt sofort der Satz

SATZ. — *Es sei $m_0 \in H^*(X; \mathbf{Q})$ ein normierter Multiplikator der kompakten orientierten torsionsfreien Mannigfaltigkeit X. Ein Element $z \in H^*(X; \mathbf{Q})$ gehört dann und nur dann zu $ch\, K^*(X)$, wenn $B(x, z m_0)$ für alle $x \in ch\, K^*(X)$ ganzzahlig ist. Ein Element $m \in H^*(X; \mathbf{Q})$ ist dann und nur dann Multiplikator, wenn $m/m_0 \in ch\, K^*(X)$.*

3.8. Gegeben sei ein endlicher CW-Komplex X. Es sei $G^*(X)$ die Menge der Elemente von $H^*(X; \mathbf{Q})$, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und deren ungerade-dimensionale Komponenten verschwinden. $G^*(X)$ ist eine multiplikative Untergruppe von $H^*(X; \mathbf{Q})$. Der Durchschnitt $G^*(X) \cap ch\, K^*(X) = G^*(X) \cap ch\, K^0(X)$ ist eine Untergruppe von $G^*(X)$. Ist X eine kompakte orientierte torsionsfreie Mannigfaltigkeit, dann definieren die normierten Multiplikatoren von X (nach Satz 3.7) ein wohlbestimmtes Element

$$\mu(X) \in G^*(X)/(G^*(X) \cap ch\, K^*(X)) ,$$

das per definitionem eine „Homotopie-Invariante“ von X ist und auch unabhängig von der Orientierung ist. Das Verhalten der Multiplikatoren bei Abbildungen soll nun betrachtet werden.

3.9. Es seien X und Y kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten und $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Der (additive) Gysin-Homomorphismus $f_*\colon H^*(Y; \mathbf{Q}) \to H^*(X; \mathbf{Q})$ ist definiert, indem man von einer Cohomologieklasse von Y via Poincaré-Dualität zur entsprechenden Homologieklasse übergeht, diese durch f in X abbildet und zur entsprechenden Cohomologieklasse von X übergeht. f_* und der Ring-Homomorphismus $f^*\colon H^*(X; \mathbf{Q}) \to H^*(Y; \mathbf{Q})$ stehen in der Beziehung

$$(8) \quad f_*(f^* x \cdot y) = x \cdot f_*(y) \text{ für } x \in H^*(X;\mathbf{Q}) \text{ und } y \in H^*(Y;\mathbf{Q}) .$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen von 3.7 gilt

LEMMA. — *Gegeben sei $f\colon Y \to X$. Ist m ein Multiplikator von Y, dann ist $f_* m$ ein Multiplikator von X.*

Nach (8) ist nämlich der Wert von $x \cdot f_*(m)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X gleich dem Wert von $f^* x \cdot m$ auf dem orientierten Grundzyklus von Y. Ist $x \in ch\, K^*(X)$, dann ist $f^* x \in ch\, K^*(Y)$, also nimmt $f^* x \cdot m$ und damit auch $x \cdot f_*(m)$ auf dem jeweiligen Grundzyklus einen ganzzahligen Wert an.

SATZ. — *Gegeben seien kompakte orientierte torsionsfreie Mannigfaltigkeiten X, Y. Es sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei $\mathcal{T}(Y)$ bzw. $\mathcal{T}(X)$ ein festgewählter normierter Multiplikator von Y bzw. X. Ist $\eta \in K^*(Y)$, dann gibt es ein Element $f_! \eta \in K^*(X)$, so dass*

$$(9) \qquad f_*(ch(\eta) \cdot \mathcal{T}(Y)) = ch(f_! \eta) \cdot \mathcal{T}(X) .$$

Der Beweis folgt sofort aus dem vorstehenden Lemma und aus Satz 3.7. Da $ch\colon K^*(X) \to H^*(X; \mathbf{Q})$ injektiv ist (Satz 3.4) ist $f_! \eta$ durch (9) eindeutig bestimmt.

3.10. In diesem Paragraph haben wir an vielen Stellen vorausgesetzt, dass die auftretenden Mannigfaltigkeiten (d. h. ihre ganzzahligen Cohomologieringe) keine Torsion haben. Das geschah um die Darstellung zu vereinfachen. Die Begriffe „Multiplikator" und „normierter Multiplikator" lassen sich auch für beliebige kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten einführen. Natürlich bleibt Lemma 3.9 richtig. Für die Lemmata 3.6 und 3.7 sowie für die Sätze 3.7 und 3.9 wurde die Torsionsfreiheit wesentlich benutzt. Jedoch ist uns kein Beispiel bekannt, dass diese Lemmata und Sätze für Mannigfaltigkeiten mit Torsion falsch werden. Für differenzierbare Mannigfaltigkeiten siehe den nächsten Paragraphen.

§ 4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Pontrjaginsche Klassen.

4.1. Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir setzen voraus, dass die zweite Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ als Reduktion einer ganzzahligen Klasse $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$ auftritt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn X keine Torsion hat. Wir nennen X eine c_1-Mannigfaltigkeit, wenn ein Element $c_1(X) \in H^2(X; \mathbf{Z})$, dessen Reduktion mod 2 gleich $w_2(X)$ ist, fest gewählt ist. Es seien $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ die Pontrjaginschen Klassen von X. Man definiert dann die totale Toddsche Klasse $\mathcal{T}(X) \in H^*(X; \mathbf{Q})$ der c_1-Mannigfaltigkeit X durch folgende Gleichung

$$\mathcal{T}(X) = e^{c_1(X)/2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \dots, p_j), \tag{1}$$

wo $\{\hat{A}_j\}$ die zur Potenzreihe $\dfrac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)}$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist

$$\hat{A}_0 = 1, \quad \hat{A}_1 = -\frac{p_1}{24}, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{2^7 . 45}(-4p_2 + 7p_1^2), \dots$$

Es gilt [3, 4, 6]:

Satz. — *Gegeben sei eine c_1-Mannigfaltigkeit X. Für jedes $\xi \in K^*(X)$ ist der Wert von $ch(\xi) \cdot \mathcal{T}(X)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X eine ganze Zahl.*