III. Espaces homogènes réductifs. Cas riemannien.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

THÉORÈME. — *Si* V_m *est une variété riemannienne compacte,* $I^0(V_m)$ *son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif),* J_x *le sous-groupe d'isotropie en* x, *on a*

(9-4) $$K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0$$

et

(9-5) $$\tilde{J}_x \subset \Psi_x .$$

En particulier pour tout espace homogène riemannien compact, l'holonomie est normale.

III. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS. CAS RIEMANNIEN.

10. *Notion d'espace homogène réductif* (Nomizu].

Sur un espace homogène $V_m = G/H$ une *structure réductive* (ou d'espace homogène réductif) est définie par la donnée d'une *décomposition en somme directe de l'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *de* G

(10-1) $$\underline{G} = \underline{H} + M \qquad (\underline{H} \cap M = 0)$$

telle que le sous-espace M *vérifie*

(10-2) $$adj(H)\, M \subset M ,$$

adj (H) est ici la restriction à H de la représentation adjointe de G. Tout élément λ de $\underline{G}$ s'écrit d'une manière et d'une seule $\lambda = \lambda_{\underline{H}} + \lambda_M$ $(\lambda_{\underline{H}} \in \underline{H};\ \lambda_M \in M)$. Par la projection naturelle p de G sur V_m, on peut identifier M avec l'espace vectoriel Tx_0 tangent en $x_0 = pe$ à V_m et adj (H) avec le groupe linéaire d'isotropie $\tilde{H}$. Les cas où H est compact ou connexe réductif dans G fournissent des exemples de structure réductive.

D'après (10-2), M définit sur l'espace fibré principal G de base V_m une connexion infinitésimale invariante par G. Si $P(V_m)$ est l'espace de repères défini par les repères de V_m déduits de l'un d'entre eux par l'action de G, le fibré $P(V_m)$ est isomorphe au fibré G. De la connexion invariante obtenue sur

$P(V_m)$, on déduit une connexion linéaire invariante pour $V_m = G/H$. Cette connexion ω est dite la *connexion canonique* de la structure.

A tout élément λ de $\underline{G}$ correspond un sous-groupe à un paramètre noté $\exp[sX(\lambda)]$ où $X(\lambda)$ est la t.i. correspondante. Si $\lambda \in M$, le transport le long de $x(s) = \exp[sX(\lambda)]\, x_0$ relativement à ω coïncide avec l'action correspondante de $\exp[sX(\lambda)]$; $x(s)$ est ainsi une géodésique de ω rapportée à un paramètre affine. L'espace homogène réductif $V_m = G/H$ est *complet* pour sa connexion canonique.

Sans entrer dans le détail de la théorie, je me bornerai à indiquer des résultats liés à la considération du groupe de Kostant. On voit sur (3-1) que pour $\lambda \in M$

$$A_{X(\lambda)}(x_0) = 0\,.$$

Le groupe de Kostant relatif à ω ne provient que des éléments de $\underline{H}$ et si $\tilde{H}^0$ est le groupe linéaire connexe d'isotropie en x_0:

$$K_{x_0}(G) = \tilde{H}^0 \tag{10-3}$$

Ainsi, d'après le § 6, *tout tenseur invariant par* G *est invariant par transport relativement à* ω. En particulier les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion canonique sont à dérivée covariante nulle. Les espaces homogènes réductifs constituent une généralisation naturelle des espaces homogènes symétriques d'Elie Cartan.

11. *Connexion de Cartan d'un espace réductif.*

A partir de la connexion canonique, les connexions linéaires invariantes de l'espace correspondent biunivoquement aux tenseurs invariants de type (1, 2). Il existe une connexion invariante et une seule sans torsion telle que les géodésiques issues de x_0 et rapportées à un paramètre affine coïncident avec celles de la connexion canonique. J'appelle cette connexion la *connexion de Cartan* de l'espace; celui-ci est toujours *complet* pour sa connexion de Cartan.

Si $\lambda \in \underline{G}$, l'endomorphisme $A_{X(\lambda)}(x_0)$ relatif à la connexion de Cartan est tel que:

$$(11\text{-}1) \qquad A_{X(\lambda)}(x_0) \cdot p\mu = -p\left(\frac{1}{2}[\lambda_M, \mu]_M + [\lambda_{\underline{H}}, \mu]\right)(\mu \in M) .$$

Considérons les endomorphismes B_λ de M définis par:

$$(11\text{-}2) \qquad B_\lambda \mu = [\lambda, \mu]_M \qquad (\lambda \in \underline{G}, \mu \in M) .$$

Le groupe de Kostant K_{x_0} (G) *relatif à la connexion de Cartan peut être identifié par* p *avec le groupe connexe* K (G) *d'automorphismes de* M *admettant pour algèbre de Lie l'algèbre d'endomorphismes engendrée par les* B_λ.

12. *Espace homogène riemannien naturellement réductif.*

Soit $V_m = G/H$ (G effectif) un espace homogène muni

1° d'une métrique riemannienne invariante ds^2;

2° d'une structure réductive $\underline{G} = \underline{H} + M$

telles que la connexion riemannienne de la métrique coïncide avec la connexion de Cartan de la structure réductive. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le tenseur métrique soit invariant par transport relativement à la connexion de Cartan, c'est-à-dire que la forme quadratique correspondante sur M soit invariante par le groupe $K(G)$. Nous dirons que G/H est muni d'une structure d'*espace homogène riemannien naturellement réductif.* Si H est compact ou connexe, pour qu'à une structure réductive corresponde une structure d'espace homogène riemannien naturellement réductif, il suffit que $K(G)$ soit *compact.*

Soit l_1 un lacet en $x_0 = pe$. La variété riemannienne V_m étant complète, il existe sur son revêtement universel une géodésique joignant deux points arbitraires. Par suite, par projection, il existe sur V_m un lacet l_2 en x_0, homotope à l_1 et qui est un arc géodésique de la connexion de Cartan de la structure réductive; un tel arc peut être défini par

$$x(t) = \exp\left[tX(\lambda)\right] x_0 \qquad (\lambda \in M)$$

avec $0 \leqslant t \leqslant u$ et pour $t = u$, $\exp[uX(\lambda)] \in H$.

Soit ω *une connexion linéaire invariante arbitraire* et étudions son holonomie. Si r_1 (resp r_2) est l'élément de son groupe d'holonomie Ψ_{x_0} obtenu par transport le long de l_1 (resp. l_2), on a:

$$r_1 \in r_2 \Psi^0_{x_0} .$$

Mais d'après (3-1)

$$r_2 = \exp (uX)' \exp [uA_{X(\lambda)}(x_0)] \in \tilde{H} \cdot K_{x_0}(G)$$

où $K_{x_0}(G)$ est le groupe de Kostant relatif à ω. Comme $\Psi^0_{x_0} \subset K_{x_0}$ (G), on voit que *pour toute connexion invariante sur un tel espace*

$$\Psi_{x_0} \subset \tilde{H} \cdot K_{x_0}(G) . \tag{12-1}$$

13. *Cas où* G *est compact.*

Soit $V_m = G/H$ un espace homogène où G effectif est *compact*. Un tel espace admet certainement une structure d'espace homogène riemannien naturellement réductif. En effet, soit M l'orthocomplément de $\underline{H}$ dans $\underline{G}$ par rapport au produit scalaire défini par une forme quadratique définie positive de $\underline{G}$ invariante par G. D'après l'invariance de ce produit scalaire

$$[\lambda, \mu] \cdot \nu + \mu \cdot [\lambda, \nu] = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu \in \underline{G}) .$$

En particulier si μ, $\nu \in M$

$$[\lambda, \mu]_M \cdot \nu + \mu \cdot [\lambda, \nu]_M = 0 \qquad (\lambda \in \underline{G};\ \mu, \nu \in M)$$

et le produit scalaire $\mu . \nu$ de M est invariant par le groupe $K(G)$ correspondant à la structure réductive $\underline{G} = \underline{H} + M$.

Considérons sur l'espace $V_m = G/H$ à G compacte une métrique riemannienne invariante arbitraire. L'holonomie est normale: pour la connexion riemannienne correspondante

$$\Psi^0_{x_0} = K_{x_0}(G) . \tag{13-1}$$

D'autre part, d'après (9-5):

$$\tilde{H} \subset \Psi_{x_0} .$$

De (12-1) on déduit que pour toute métrique invariante $\Psi_{x_0} = \tilde{H} . K_{x_0}(G)$, soit:

$$\Psi_{x_0} = \tilde{H} \cdot \Psi^0_{x_0} . \tag{13-2}$$