

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES
Kapitel: II. Formes a deux variables.
Autor: Chabauty, Claude
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37952>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II. FORMES A DEUX VARIABLES.

Démontrons l'énoncé (C), dû à LAGRANGE. On considère d'abord une forme définie positive (à coefficients réels). On peut la décomposer en somme de carrés

$$f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2 = |x\vec{u} + y\vec{v}|^2$$

(avec $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$; $|\quad|$ note la distance à l'origine).

$$\text{Le discriminant de } f \text{ est } \Delta = ac - b^2 = \left(\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)^2.$$

Il s'agit de majorer le minimum μ de la distance de l'origine aux autres points du « réseau » G des points $x\vec{u} + y\vec{v}$ (x, y entiers). Soit \vec{m} un point de G réalisant ce minimum, \vec{m}' un point de G formant avec \vec{m} une « base » du groupe additif G et situé le plus près possible de l'origine. Des considérations géométriques élémentaires ¹⁾ montrent qu'on a ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire, et $\cdot \wedge \cdot$ le produit vectoriel):

$$(\langle \vec{m}, \vec{m}' \rangle)^2 \leq \frac{|\vec{m}|^4}{4}.$$

$$\text{Or } |\vec{m} \wedge \vec{m}'|^2 = \left(\det \begin{vmatrix} m_1 & m'_1 \\ m_2 & m'_2 \end{vmatrix} \right)^2 = \left(\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)^2 = \Delta,$$

$$\text{et } |\vec{m}'|^2 = \frac{(\langle \vec{m}, \vec{m}' \rangle)^2}{|\vec{m}|^2} + \frac{|\vec{m} \wedge \vec{m}'|^2}{|\vec{m}|^2}$$

$$\text{donc } |\vec{m}|^2 \times |\vec{m}'|^2 \leq \frac{|\vec{m}|^4}{4} + \Delta,$$

et finalement

$$|\vec{m}|^4 \leq |\vec{m}|^2 \times |\vec{m}'|^2 \leq \frac{4}{3} \Delta,$$

ce qui est dans le cas des formes définies le résultat à démontrer. La majoration est alors la meilleure possible comme on voit en utilisant

¹⁾ Le lecteur est prié de faire la figure.

$\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, ce qui correspond à la forme $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 + xy + y^2$ pour laquelle $\mu = 1$ et $\Delta = \frac{3}{4}$.

Si maintenant $g(x, y)$ est une forme indéfinie, décomposons la en différence de deux carrés $g(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 - (xu_2 + yv_2)^2$, $|g(x, y)|$ est majoré par la forme définie $f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2$, et $|\text{discr}(g)| = \text{discr}(f)$, ce qui démontre (C) pour les formes indéfinies. Si nous utilisons toutes les décompositions de g en différence de deux carrés, il en résulte que l'inégalité de (C) a, pour les formes indéfinies, une infinité de solutions en entiers x, y , résultat suffisant pour obtenir aisément la démonstration de (B), comme nous avons vu plus haut.

Il serait tentant de démontrer précisément l'énoncé (C') avec le coefficient optimum $\frac{1}{5}$, par le même type de méthode géométrique élémentaire. Nous y renonçons faute de temps.

III. FORMES à n VARIABLES: LA MÉTHODE DE MINKOWSKI.

De tels calculs deviennent plus compliqués dans R^3 (GAUSS a trouvé le coefficient optimum pour les formes quadratiques définies à trois variables) et vraiment difficiles pour les dimensions supérieures. En renonçant à trouver la valeur exacte de la constante optima

$$\gamma_n = \text{Sup}_f \text{Min}_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) / (\text{discrim}(f))^{1/n}$$

(x_i entiers non tous nuls, f forme quadratique définie positive), HERMITE a pu démontrer que γ_n était finie, et plus précisément que

$$\gamma_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/4}$$

par un raisonnement récurrent.