III. Formes à n variables: la méthode DE MINKOWSKI.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

$\vec{u} = (1,0)$ et $\vec{v} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, ce qui correspond à la forme $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 = x^2 + xy + y^2$ pour laquelle $\mu = 1$ et $\Delta = \frac{3}{4}$.

Si maintenant $g(x, y)$ est une forme indéfinie, décomposons la en différence de deux carrés $g(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 - (xu_2 + yv_2)^2$, $|g(x, y)|$ est majoré par la forme définie $f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2$, et $|\mathrm{discr}(g)| = \mathrm{discr}(f)$, ce qui démontre (C) pour les formes indéfinies. Si nous utilisons toutes les décompositions de g en différence de deux carrés, il en résulte que l'inégalité de (C) a, pour les formes indéfinies, une infinité de solutions en entiers x, y, résultat suffisant pour obtenir aisément la démonstration de (B), comme nous avons vu plus haut.

Il serait tentant de démontrer précisément l'énoncé (C′) avec le coefficient optimum $\frac{1}{5}$, par le même type de méthode géométrique élémentaire. Nous y renonçons faute de temps.

III. Formes à n variables: la méthode de Minkowski.

De tels calculs deviennent plus compliqués dans R^3 (Gauss a trouvé le coefficient optimum pour les formes quadratiques définies à trois variables) et vraiment difficiles pour les dimensions supérieures. En renonçant à trouver la valeur exacte de la constante optima

$$\gamma_n = \operatorname*{Sup}_{f} \operatorname*{Min}_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n)/(\mathrm{discrim}\,(f))^{1/n}$$

(x_i entiers non tous nuls, f forme quadratique définie positive), Hermite a pu démontrer que γ_n était finie, et plus précisément que

$$\gamma_n \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/4}$$

par un raisonnement récurrent.

Nous appelerons γ_n la constante d'Hermite (de la dimension n).

La méthode d'attaque de ce problème a été complètement renouvelée par MINKOWSKI qui a montré tout le parti qu'on pouvait tirer de la considération de la mesure (aire pour $n = 2$, volume pour n $= 3, \ldots$) des figures associées aux formes étudiées.

Il n'est pas plus difficile d'établir une théorie correcte de la *mesure* dans l'espace à n dimension R^n que celle de l'aire dans R^2, du volume dans R^3. Ce que nous devons supposer établi, c'est que pour une large classe d'ensembles X de R^n on a pu leur associer un nombre qu'on notera mes (X) qui est $\geqq 0$ et éventuellement $+\infty$ tel que mes $(X \cup Y) =$ mesure $(X) +$ mes (Y) si X et Y sont sans point commun, mes $(C) = 1$ pour le « cube » unité défini par $0 \leqq x_1 < 1, \ldots, 0 \leqq x_n < 1$, et qui est invariant par translation: mes $(X + \vec{a}) =$ mes (X). *L'intégration* des fonctions $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ s'en suit en définissant $\int f$ à l'aide de la mesure dans R^{n+1} du domaine associé à f (comme l'intégrale des fonctions positives d'une variable se définit à l'aide de l'aire du domaine associé). Alors si X et Y sont des domaines mesurables sans point commun

$$\int_{X \cup Y} f = \int_X f + \int_Y f.$$

Il est commode de supposer qu'il a été démontré que la mesure et l'intégrale sont des fonctions dénombrablement additives d'ensembles, c'est-à-dire que

$$\text{mes}\,(\bigcup_n X_n) = \sum_n \text{mes}\,(X_n) \qquad \int_{\cup X_n} f = \sum_n \int_{X_n} f$$

quand les X_n sont deux à deux disjoints [1]).

Désignons par Z^n le réseau de tous les points à coordonnées entières, alors les cubes $(C + \vec{z}, \vec{z} \in Z^n)$, translatés du cube-unité C, $0 \leqq x_i < 1$ forment une partition de R^n (c'est-à-dire sont disjoints deux à deux et leur réunion est R^n). On a donc alors pour une fonction $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$:

---

[1]) Dans la suite, les ensembles et les fonctions considérés sont supposés implicitement mesurables et intégrables. La plus grande généralité est obtenue avec la mesure et l'intégrale de Borel-Lebesgue, mais la mesure et l'intégrale de Riemann-Jordan fournissent déjà tous les ensembles et fonctions utiles dans les applications. On peut dans ce cas se dispenser de faire appel à la propriété d'additivité dénombrable.

$$\int_{\vec{x}\varepsilon R^n} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z}\varepsilon Z^n} \int_{\vec{x}\varepsilon C+\vec{z}} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z}\varepsilon Z^n} \int_{x\varepsilon C} f(\vec{x}+\vec{z}) = \int_{\vec{x}\varepsilon C} \sum_{\vec{z}\varepsilon Z^n} f(\vec{x}+\vec{z})$$

c'est-à-dire

$$\int_{\vec{x}\varepsilon R^n} f(\vec{x}) = \int_{\vec{x}\varepsilon C} f^*(\vec{x}) \tag{1}$$

avec

$$f^*(\vec{x}) = \sum_{\vec{z}\varepsilon Z^n} f(\vec{x}+\vec{z}) .$$

Supposons que $f(\vec{x})$ soit la fonction caractéristique d'un ensemble A (c'est-à-dire la fonction égale à 1 en tout point de A et nulle en dehors de A), alors:

$$\int_{\vec{x}\varepsilon R^n} = \text{mes}\,(A) \text{ et } f^*(\vec{x}) = \text{nbre}\,((A\cap(\vec{x}+Z^n)) = \text{nbre}\,((A-\vec{x})\cap Z^n)$$

(nbre (V) désigne le nombre de points de l'ensemble V).

Disons que A est *irréductible* par rapport à Z^n, si $\vec{x}\ \varepsilon\ A, \vec{x}'\ \varepsilon\ A$ et $\vec{x} - \vec{x}'\ \varepsilon\ Z^n$ entraînent $\vec{x} = \vec{x}'$, une propriété équivalente est que la famille d'ensembles $(A+\vec{z}, \vec{z}\ \varepsilon\ Z^n)$ forme un *empilement*, c'est à-dire $A+\vec{z}$ et $A+\vec{z}'$ n'ont pas d'élément commun si $\vec{z}\ \varepsilon\ Z^n$ $\vec{z}'\ \varepsilon\ Z^n$, $\vec{z} \neq \vec{z}'$ c'est encore équivalent au fait que $f^*(\vec{x}) \leqq 1$ quel que soit $\vec{x}\ \varepsilon\ R^n$; il en résulte mes $(A) = \int_{\vec{x}\varepsilon G} f^*(\vec{x}) \leqq 1$ (puisque mes $(C) = 1$), on peut même préciser mes $(A) < 1$, si A est borné fermé.

Revenons à la fonction f générale. Comme mes $(C) = 1$

$$\text{Borne inf. } f^*(x) \leqq \int_C f^* = \int_{R^n} f \leqq \text{Borne sup. } f^*(x) .$$

Il en résulte l'existence de $\vec{a}\ \varepsilon\ R^n$ tel que $f^*(a) \leqq \int_{R^n} f$ et de $\vec{b}\ \varepsilon\ R^n$ tel que $f^*(\vec{b}) \geqq \int_{R^n} f$. Si f est la fonction caractéristique de l'ensemble A, on a donc nbre $(A-\vec{a}) \leqq$ mes (A), nbre $(A-\vec{b}) \geqq$ mes (A).

Si T est une transformation linéaire inversible de R^n, elle multiplie la mesure des ensembles par le coefficient $|\text{dét}\,(T)|$, $G = T(Z^n)$ est le *réseau* engendré par les n vecteurs $\vec{u}_1 = T(\vec{e}_1)$, ..., $\vec{u}_n = T(e_n)$, (où les $\vec{e}_i$ sont les vecteurs-unités sur les axes), on pose dét $(G) = |\text{dét}(T)| =$ mesure (P) où P est un domaine fondamental de R^n modulo G, par exemple P est le parallèlotope formé par les $\vec{x} = \sum t_i \vec{u}_i$, $0 \leqq t_i < 1$, et le résultat obtenu ci-dessus pour le réseau Z^n se traduit pour un réseau quelconque G de R^n, par l'énoncé que nous appellerons *Théorème de Minkowski-Blichfeldt :*

Si A est un ensemble et G un réseau de R^n

$$\text{mes}(A) = \int_{x \varepsilon P} \text{nbre}((A+\vec{x}) \cap G)$$

autrement dit la valeur moyenne de nbre $((A+\vec{x}) \cap G)$ est égale à mes $(A)/$dét (G). En particulier il existe $\vec{a}$ tel que

nbre $((A+\vec{a}) \cap G) \geqq$ mes $(A)/$dét G et il existe $\vec{b}$ tel que
nbre $((A+\vec{b}) \cap G) \leqq$ mes $(A)/$dét G.

Si A est irréductible par rapport à G, ou, ce qui revient au même, si la famille des ensembles $(A + \vec{g}, \vec{g} \varepsilon G)$ est un empilement mes $(A) \leqq$ det G. Si en outre A est borné fermé, on a mes $(A) < 1$.

IV. Applications aux formes quadratiques définies positives et aux approximations diophantiennes linéaires.

Considérons dans R^n la boule de rayon unité centrée à l'origine et ouverte, B: $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 < 1$ et soit Ω_n sa mesure. Nous noterons B_r celle de rayon r: $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 < r^2$.

Soit G un réseau de R^n. Pour que $G \cap B_r$ se réduise à l'origine, il faut et il suffit que $B_{r/2}$ soit irréductible par rapport à G, autrement dit que les $(B_{r/2} + \vec{g}, \vec{g} \varepsilon G)$ forment un empilement. On a donc alors mes $(B_{r/2}) \leqq$ dét G, c'est-à-dire $\frac{r^n}{2^n} \Omega_n \leqq$ dét G. Si donc $\vec{m}$ est un point de G (autre que l'origine) ayant la distance minima à l'origine

$$|m|^2 \leqq 4(\text{dét }(G))^2/\Omega_n^{2/n}.$$

La constante d'Hermite satisfait donc à

$$\gamma_n \leqq 4/\Omega_n^{2/n}.$$