VI. Conclusion.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

(c'est-à-dire $(\sqrt{2})^n \, \Omega_n$), divisé par le déterminant de G. Par conséquent:

$$n + 1 \geqq (\sqrt{2})^n \, \Omega_n / \text{dét}\,(G) \; ,$$

ou encore:

$$\text{densité de l'empilement} = \Omega_n / \text{dét}\, G \leqq (n + 1)/(\sqrt{2})^n \; ,$$

c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

Traduit sur γ_n, cela améliore le résultat de Minkowski par un coefficient multiplicatif $\dfrac{1 + \varepsilon(n)}{2}$

$$\gamma_n \leqq \frac{n}{\pi e} (1 + \varepsilon(n))$$

Le théorème de Hlawka cité plus haut montre

$$\gamma_n \geqq \frac{n}{2\pi e} (1 + \varepsilon(n)) \; .$$

On voudrait bien en savoir plus, en particulier si la densité peut être majorée par k^n avec $k < 1/\sqrt{2}$.

VI. Conclusion.

Ces quelques exemples peuvent donner une idée de l'efficacité des méthodes que Minkowski a introduites en Géométrie des nombres, ceux que nous avons donnés sont fondamentaux. Mais la variété des problèmes qui se posent est très grande. Pour l'étude des $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquels la figure associée $| f(x_1, \ldots, x_n) | \leqq 1$ est non bornée et de mesure infinie, seule une partie des problèmes peut être étudiée par les méthodes de Minkowski et d'autres techniques doivent être introduites.

Il faut signaler pour terminer que, si dans cet exposé on a insisté sur des résultats très généraux, où le nombre de dimensions de l'espace, c'est-à-dire le nombre des variables était indifférent, il y a encore des problèmes à un petit nombre de variables, intéressants et non résolus. Par exemple, appelant maintenant *empilement* une famille d'ensembles $(A + \vec{g}, \vec{g} \; \varepsilon \; H)$ disjoints deux à deux, H n'étant plus nécessairement un réseau, et *empilement régulier*, une telle famille, si H est un réseau, on ne sait pas encore s'il n'y a pas dans l'espace à trois dimensions d'empilement plus « dense » que l'empilement régulier le plus dense, qui est l'empilement « en boulet de canon », celui dont le réseau a pour base des points formant avec l'origine un tétraèdre équilatéral (de côté 2 si les boules empilées ont le rayon 1). Une démonstration a été donnée par Lord Kelvin, sur la foi de laquelle physiciens et minéralogistes croient qu'un tel empilement est impossible, mais cette démonstration est insuffisante et la question est toujours ouverte. Par contre pour R^2 la question est résolue par la négative, il n'y a pas d'empilement irrégulier, plus dense que l'empilement régulier le plus dense, c'est-à-dire celui correspondant au réseau admettant pour base deux points formant avec l'origine un triangle équilatéral (de côté 2 si les disques empilés ont le rayon 1) (cf § II) [1]).

On trouvera dans Koksma [4], un résumé très complet des résultats jusqu'en 1936 et dans Cassels [1, 2] les principaux résultats classiques et les résultats récents avec leurs démonstrations. Ce sont des ouvrages techniques, on y trouvera une bibliographie étendue. A l'opposé, on trouvera une introduction élémentaire et très intéressante à la géométrie des nombres dans plusieurs des chapitres du Hardy et Wright [3]. Je ne connais pas d'ouvrage d'un niveau intermédiaire.

Il est intéressant aussi de lire les exposés faits aux différents Congrès internationaux de Mathématiques sur les résultats et les conjectures en Géométrie des nombres, par exemple celles de Mordell au congrès de 1937, celles de Davenport au congrès de 1950 et aux congrès suivants et les exposés de séminaires, car les idées générales y sont soulignées plus que les détails techniques qu'on pourra étudier ensuite.

RÉFÉRENCES

[1] Cassels, *Introduction to the geometry of numbers*, 1959.
[2] —— *Introduction to diophantine approximations*, 1957.
[3] Hardy and Wright, *Introduction to the theory of numbers*, 1948.
[4] Koksma, *Diophantische Approximationen*, 1936.

Institut Fourier.
Université de Grenoble.

[1]) Signalons à ce propos que la majoration de Blichfeldt pour la densité d'empilement de boules de R^n, est valable même si l'empilement n'est pas construit à partir d'un réseau.