

# méthode axiomatique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'ANALYSE ET BOURBAKI <sup>1</sup>

par Gustave CHOQUET

Le titre de cette étude laisse espérer et craindre à la fois que j'ai le projet aventureux de lire les pensées de cet être polycéphale qui se nomme BOURBAKI.

En fait, c'est de l'ensemble de l'Analyse moderne que je veux parler, mais BOURBAKI a maintenant des conceptions si clairement cristallisées, et il est tellement mêlé au développement des Mathématiques de notre temps qu'on peut espérer, en étudiant ses œuvres, philosophiques et mathématiques, saisir dans un grand état de pureté l'essentiel des tendances de l'Analyse moderne.

Une telle étude pourra ensuite nous aider à mieux concevoir un enseignement de l'Analyse à tous les niveaux, qui soit adapté à notre temps.

## LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

L'étude du développement historique des mathématiques montre assez nettement qu'après chaque période de recherches en extension vient une période de synthèse, où des méthodes générales sont élaborées, et l'édifice mathématique basé plus solidement. C'est ainsi que la synthèse de Descartes vint couronner une longue période de recherches en apparence très variées, et permit de reléguer dans le musée des curiosités une multitude de procédés d'étude de courbes et fonctions particulières.

Aujourd'hui le nombre des mathématiciens est tel que ces deux tendances peuvent coexister; toutefois l'œuvre de synthèse des cinquante dernières années, rendue possible par la création de la théorie des ensembles et de son langage est particulièrement

---

<sup>1</sup>) Conférence donnée au Séminaire organisé par la C.I.E.M. à Lausanne, le 26 juin 1961.

remarquable; elle s'est nettement concrétisée chez BOURBAKI, et c'est là que je veux l'étudier.

Pour BOURBAKI il n'y a plus désormais qu'une *Mathématique* et l'outil essentiel de cette évolution vers l'unité a été la *méthode axiomatique*.

Pour appliquer cette méthode à l'étude d'une théorie, le mathématicien « *dissocie* les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent; puis, prenant chacun d'eux isolément, et le posant en principe abstrait, il déroule les conséquences qui lui sont propres; puis, revenant à la théorie étudiée, il en *combine* de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudie comment ils réagissent les uns sur les autres » (BOURBAKI).

On retrouve dans cette analyse, mais sous une forme plus structurée, l'un des principes de base de Descartes: Diviser chaque difficulté en autant d'éléments qu'il est nécessaire.

Les « ressorts principaux des raisonnements » constituent les *structures*:

Par exemple l'ensemble  $R$  des nombres réels possède des structures variées: Structures de groupe, de corps, d'espace vectoriel, d'ordre, d'espace topologique.

Inversement une même structure peut se retrouver dans plusieurs théories distinctes; par exemple la structure de groupe se retrouve dans l'étude de  $R$ , des entiers modulo  $p$ , des déplacements de l'espace.

Pour que l'étude d'une structure puisse s'appliquer à des théories variées, les ensembles étudiés doivent donc être très généraux; en particulier la nature de leurs éléments constitutifs ne doit pas intervenir; seules doivent compter les relations qui existent entre ces éléments; celles-ci sont clairement précisées dans les *axiomes* qui définissent la structure.

Par exemple, une structure d'ordre sur un ensemble quelconque  $E$  sera une relation binaire sur  $E$ , notée  $<$ , satisfaisant aux axiomes suivants:

Pour tous  $x, y, z$  appartenant à  $E$ , on a:

- (1)  $x < x$ ;
- (2)  $(x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow (x = y)$ ;
- (3)  $(x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow (x < z)$ .

Certaines de ces structures ont une importance fondamentale puisqu'on les retrouve dans toutes les théories, ce sont les *structures-mères*: structures associées à une relation d'équivalence, structures d'ordre, structures algébriques, structures topologiques, etc...

Ces structures-mères sont d'ailleurs plus ou moins riches; par exemple, une structure de groupe abélien fini et une structure de corps sont plus riches qu'une structure de groupe quelconque.

D'autres structures, déjà plus complexes, font intervenir plusieurs structures-mères, liées entre elles par des conditions de compatibilité, ce sont les *structures multiples*. Par exemple, un groupe topologique est muni à la fois d'une structure de groupe et d'une structure topologique, compatibles en ce sens que les opérations  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  et  $x \rightarrow x^{-1}$  sont continues.

L'algèbre topologique, la topologie algébrique, étudient des structures multiples; la géométrie différentielle, l'algèbre différentielle étudient des structures plus riches encore.

Enfin, au sommet de l'édifice, apparaissent les *structures-carrefour*, qui font intervenir de très nombreuses structures. La théorie du potentiel est un excellent exemple d'une telle structure. La multiplicité des structures-mères qui interviennent dans de telles théories explique l'intérêt que leur portent des mathématiciens très variés; chacun des progrès réalisés dans l'étude des structures constituantes se répercute sur la théorie. C'est ainsi que les progrès de la théorie du potentiel correspondent à des progrès de théories variées, intégrale de Lebesgue, espaces topologiques, espaces vectoriels topologiques, mesures de Radon, groupes abéliens localement compacts, distributions, etc...

De telles structures sont le véritable domaine de l'analyste; aussi définirons-nous l'*Analyse* comme l'ensemble des structures-carrefours. Ces dernières n'ayant pas été définies de façon rigide, les domaines-frontière sont nombreux; notre définition n'établit qu'une hiérarchie. Une théorie *A* relève plus de l'Analyse qu'une théorie *B* si les structures étudiées dans *A* sont plus riches que celles étudiées dans *B*.

L'Analyse apparaît donc comme un monde dont la complexité rappelle celle de la Vie. Alors que l'Algèbre est un monde



minéral dont les beautés sont des cristaux aux formes pures, l'Analyse est peuplée d'êtres aux contours parfois imprécis, algues marines, hydres ou éponges; c'est une jungle exubérante qu'on peut explorer de multiples façons et où chacun peut imprimer au domaine qu'il défriche le cachet de sa personnalité.

### *Caractères de la méthode axiomatique*

1. Le développement récent des mathématiques et celui de l'industrie présentent des analogies intéressantes:

La méthode axiomatique est une taylorisation; les structures-mères sont nos machines-outils.

La méthode axiomatique apporte une *économie de pensée et de notations*; les énoncés importants qu'on utilise partout sous des formes variées sont démontrés une fois pour toutes, dans un système d'axiomes assez général pour englober tous les cas utiles; on choisit avec soin dans ce cadre une terminologie et des notations qui puissent être utilisées dans les divers cas particuliers, en donnant la préférence aux mots suggestifs, qui évoquent des résonnances, éveillent l'intuition.

Ce soin dans le choix de la terminologie va de pair avec un souci de clarté dans la rédaction; les mathématiciens modernes ont un style précis et dépouillé; ils se plaisent à dégager le squelette de leurs exposés en les découpant en définitions, lemmes, théorèmes, corollaires, remarques et mises en garde (S!).

2. Les premiers systèmes axiomatiques étaient *univalents* (axiomatique de la géométrie élémentaire d'Euclide-Hilbert, définition des entiers naturels par Péano); par contre, les structures fondamentales sont *multivalentes*, c'est-à-dire que les axiomes qui les définissent s'appliquent à de vastes classes d'ensembles structurés non isomorphes.

Cette multivalence garantit leur adaptation à des situations très variées; aussi est-il parfois difficile de dire si un énoncé est de l'Algèbre, de la Géométrie ou de l'Analyse:

Ainsi la géométrie élémentaire de l'espace n'est autre que l'algèbre linéaire sur un espace vectoriel à trois dimensions muni d'un produit scalaire; et l'étude des formes quadratiques sur cet espace équivaut à l'étude des coniques du plan.

De même, étudier l'espace de Hilbert c'est, bien sûr, faire de la géométrie (sphères, angles, perpendiculaires); mais c'est aussi faire de l'algèbre et de l'analyse; par exemple, pour H. CARTAN, le balayage en théorie du potentiel n'est autre qu'une projection orthogonale sur un cône convexe d'un espace de Hilbert; plus généralement, les ensembles convexes appartiennent bien à la géométrie; mais, dans les espaces vectoriels topologiques, ils constituent un des outils de base de l'analyste.

La multivalence des grandes structures est donc un facteur d'unité, qui permet un enrichissement mutuel des diverses théories mathématiques. Pareil phénomène n'est pas nouveau: Rappelons le rôle de la représentation géométrique plane des nombres complexes, la synthèse entre géométrie et algèbre opérée par Descartes, l'appui que les recherches d'Analyse de Monge ont trouvé dans la géométrie. Mais, grâce à l'algèbre des ensembles et à son langage universel, ce phénomène s'est considérablement amplifié; citons seulement quelques exemples caractéristiques:

— La topologie de Zariski en géométrie algébrique.

— Interprétation et démonstration topologique de plusieurs théorèmes importants de logique.

— La théorie des faisceaux qui, née en topologie algébrique (J. LERAY), envahit maintenant l'Algèbre et l'Analyse.

3. De cette multivalence résulte aussi qu'on n'étudie plus un être isolé, mais des familles d'êtres ayant entre eux des relations. Aussi, non seulement les énoncés acquièrent une vaste généralité, mais chaque être individuellement est mieux connu, car ses relations avec d'autres êtres mettent en valeur ses divers aspects. Ici encore, ce qui est nouveau n'est pas cette utilisation d'un « contexte », c'est la prise de conscience du phénomène et son ampleur:

Depuis longtemps une tangente à une courbe était définie au moyen d'une famille de sécantes, les propriétés des fonctions analytiques dans le domaine réel étaient éclairées par leur étude dans le domaine complexe, et les « familles normales » de fonctions analytiques constituaient déjà un outil puissant.

Les mathématiques modernes sont donc « relationnelles », d'où un *dynamisme* interne, dont le vocabulaire et la présentation typographique mêmes sont un reflet: Applications, injections, jets, sources, flèches et schémas fléchés.

Un symbolisme commode a été créé pour noter relations et transformations:

$$x \rightarrow f(x); A \rightarrow \bar{A}; x \sim y; x < y; A \times B, \prod A_i, E/R, \text{ etc.}$$

Entre les mains du mathématicien les êtres se transforment, comme une gemme brute entre les mains d'un joaillier, et chacune des transformations qu'il leur impose en révèle, telle une facette nouvelle, un aspect inattendu.

Cet aspect relationnel est en accord avec le principe connu que, pour bien connaître une notion, il faut en étudier les variations, les contraires; il est aussi en accord avec un principe qui semble dominer toute la recherche scientifique moderne: C'est qu'on n'atteint pas l'« essence » des êtres, on ne peut espérer connaître que les relations des êtres entre eux: Une expérience de physique révèle une relation entre l'univers et un dispositif expérimental; l'essentiel d'une installation téléphonique n'est pas la nature ou la forme des fils conducteurs, mais le schéma de l'installation; et, pour le mathématicien, deux ensembles structurés isomorphes sont équivalents.

La virtuosité avec laquelle les jeunes mathématiciens formés aux méthodes nouvelles utilisent le dynamisme des relations, le plaisir qu'ils en retirent, semblent prouver que ce dynamisme est adapté à la structure du cerveau humain.

4. La multivalence des théories garantit une plus grande possibilité d'utilisation par la physique: L'espace de Hilbert s'est prêté aux interprétations de la théorie quantique des champs; la géométrie des espaces de Riemann et le calcul différentiel extérieur ont fourni le cadre de la relativité générale. La physique théorique moderne se développe d'ailleurs, elle aussi, de façon axiomatique; on y part de quelques faits fondamentaux qu'on traduit en axiomes, et on en déduit des conséquences dont on cherchera plus tard des vérifications expérimentales, tout en sachant très bien que les axiomes choisis ne traduisent qu'un aspect du monde physique.

5. Une bonne axiomatique est souvent le seul moyen de sortir de difficultés métaphysiques. Ainsi les nombres complexes n'ont perdu leur mystère et leur caractère « absurde » que le jour où l'on a identifié leur ensemble à  $R^2$  muni de deux opérations clairement explicitées. Plus près de nous, le point de départ du calcul des probabilités a été longtemps noyé dans la brume, à l'époque où la théorie avait encore trois centres: théorie des jeux, théorie des erreurs, théorie stochastique. Le calcul des probabilités n'a trouvé son unité et des fondements solides qu'avec l'axiomatique de Kolmogorov; il apparaissait dès lors comme une branche de la théorie de la mesure, mais une branche particulièrement vigoureuse, avec son langage et ses problèmes et il pouvait, à la fois s'enrichir des méthodes et résultats de la théorie de la mesure, et féconder l'Analyse classique: Les relations étroites entre la théorie du potentiel et les processus de Markov mises en évidence ces dernières années en sont une brillante illustration.

### *Dangers de la méthode axiomatique*

Si les systèmes axiomatiques sont les machines-outils des mathématiques, on conçoit qu'ils ne soient intéressants que si leur rendement est bon. Il est relativement facile de construire des systèmes axiomatiques, ne serait-ce qu'en modifiant légèrement des systèmes connus; le nombre de thèses et travaux ainsi construits est malheureusement fort grand; leur mise au point a en général donné beaucoup de plaisir à leur auteur, ce qui le conduit à leur attacher une importance démesurée. Beaucoup de ces grandes théories n'ont qu'une maigre application ou pas d'application du tout.

Une question urgente se pose donc: Quels sont les systèmes axiomatiques utiles? Il n'y a probablement aucun critère absolu qui permette d'en décider; toutefois on peut admettre qu'il ne faut pas utiliser « un pavé pour écraser une mouche »; une théorie générale sera justifiée si elle révèle des liens inattendus et féconds entre théories jusque-là étrangères en apparence, ou si elle apporte la solution d'un problème non résolu. Le fait qu'une

théorie générale s'applique à de nombreux cas n'implique d'ailleurs pas qu'elle soit utile, si la lumière dont elle les éclaire est trop maigre.

*Un garde-fou, les grands problèmes.* — Nous verrons plus loin avec quelle exigence BOURBAKI a trié les théories qui ont droit de cité dans son œuvre didactique. Mais il est intéressant d'étudier quel est, pour BOURBAKI, le garde-fou qui va le protéger de la tentation de développer, comme un but en soi, des systèmes axiomatiques.

Pour André WEIL, « si la logique est l'hygiène du mathématicien, le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes ».

C'est redire ce que disait déjà HILBERT: « Une branche de la science est pleine de vie tant qu'elle offre des problèmes en abondance; le manque de problèmes est signe de mort. »

HILBERT est d'ailleurs, pour BOURBAKI, un modèle et presque un père, et il est intéressant de savoir ce que le fils pense du père. Les Bourbakistes admirent l'élégance et la simplicité de ses travaux » due à ce qu'il a dégagé de la gangue où nul n'avait su les voir, les principes fondamentaux qui permettent de tracer vers la solution la route royale vainement cherchée jusque-là ». C'est un maître de l'axiomatique — qu'il s'agisse de structure univalente (géométrie élémentaire) ou multivalente — et il a appris aux mathématiciens à penser axiomatiquement. « Mais jamais il ne tombe dans le travers de certains disciples: Créer une grande théorie pour quelques maigres applications et généraliser pour le plaisir de généraliser. » (DIEUDONNÉ.) Il a la passion du problème spécial, précis et concret; c'est pour résoudre de tels problèmes qu'il a forgé des outils dont l'importance n'a pas diminué: Méthode directe en calcul des variations, basée sur la semi-continuité, pour résoudre le problème de Dirichlet; définition et utilisation de l'« espace de Hilbert » pour la résolution d'équations intégrales, etc...

Les grands problèmes qu'il a signalés à l'attention des mathématiciens au Congrès de 1900 n'ont pas cessé de stimuler des recherches fécondes; on continue, par exemple, à multiplier les attaques du problème de Riemann sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et la véritable nature de ce problème semble encore inconnue.