

# LA NOTION DE CONVEXITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE.

Autor(en): **Frostman, Otto**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37959>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA NOTION DE CONVEXITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE.<sup>1)</sup>

par Otto FROSTMAN

Dans l'enseignement secondaire en Suède on considère depuis longtemps la notion de dérivée des fonctions numériques d'une variable réelle, définie comme la limite du quotient des différences. On se limite dans les applications à certaines classes de fonctions élémentaires, telles que les polynômes, les fonctions rationnelles etc., et même sur la branche mathématique on n'enseigne pas la dérivée de la fonction exponentielle. Or, quelles que soient les fonctions considérées, les applications peuvent se grouper de la manière suivante :

1. Tangente et normale à une courbe.
2. Variation d'une fonction dans un intervalle, en particulier, détermination des maxima et des minima.
3. Convexité des courbes, points d'inflexion.
4. Primitives d'une fonction donnée et calcul des aires et des volumes.

Pour la première application il suffit de rendre sensible que la tangente au point  $(a, f(a))$  du graphe de la fonction  $f$  est la ligne à coefficient angulaire  $f'(a)$  passant par ce point; c'est en effet une définition. Pour les autres on aurait besoin de quelques lemmes; en voici un qui est démontré plus ou moins rigoureusement :

Si  $f'(x) > 0$  la fonction  $f$  est strictement croissante en  $x$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(x') < f(x) < f(x'')$  pour  $x - \delta < x' < x < x'' < x + \delta$ . D'une manière analogue,  $f'(x) < 0$  entraîne que  $f$  est strictement décroissant en  $x$ .

---

<sup>1)</sup> Conférence prononcée au Séminaire organisé par la C.I.E.M. à Lausanne le 26 juin 1961.

De ce lemme, ou par une méthode directe, on conclut immédiatement que  $f'(x_0) = 0$  si  $f$  a un maximum ou un minimum au point intérieur  $x_0$ . Pour la conclusion inverse on se contente de dire que si  $f'(x_0) = 0$  et si  $f'$  change de signe en  $x_0$ , on a un maximum ou un minimum selon le cas. Or ce fait n'est jamais démontré d'une manière satisfaisante, car, je n'ai vu dans aucun manuel de l'école secondaire une démonstration rigoureuse du fait qu'une fonction, qui est strictement croissante en tout point d'un intervalle ouvert, est strictement croissante au sens global dans l'intervalle, c'est-à-dire que  $x_1 < x_2$  entraîne  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Évidemment, on ne peut pas faire, dans l'enseignement secondaire, toutes les démonstrations qui seraient nécessaires pour un traitement rigoureux de l'analyse ou de la géométrie. Or, il y a un principe qu'on doit adopter dans tous les cas: *Il faut dire clairement ce qu'on ne peut pas démontrer et qu'on laisse à l'enseignement supérieur.* Surtout, on ne doit jamais faire une démonstration fausse qui ressemble à une démonstration correcte. L'exemple donné de la croissance d'une fonction est de cette espèce; quelle que soit la méthode on tomberait, dans une démonstration, aux mêmes raisonnements qui conduisent au théorème de Heine-Borel. Or dans ce cas, on pourrait se demander si on ne devrait pas introduire, dans l'enseignement secondaire, le théorème des accroissements finis, en le mettant en vue de la manière géométrique bien connue et, évidemment, en tirant l'attention sur le fait que la démonstration n'est pas rigoureuse. Ce théorème accepté, toute la théorie élémentaire de l'analyse serait solidement basée, en particulier, le théorème fondamental des fonctions primitives et l'étude des courbes et leur convexité, qui est maintenant une affaire tout à fait heuristique.

Je veux m'arrêter à la notion de convexité. En général dans l'enseignement secondaire, une courbe sera dite convexe (supérieurement concave) si elle est située au-dessus de la tangente en tout point de l'intervalle considéré. On énonce ensuite que ce fait est équivalent à ce que la fonction correspondante  $f$ , supposée dérivable, a une dérivée croissante ou encore que  $f''$  est non-négatif. Rien n'est prouvé mais on fait souvent allusion à des faits connus de telle façon que l'élève inévitablement croit que

la chose est achevée. Cette méthode n'est donc pas bonne en principe déjà et, en outre, c'est dommage car on a ici une partie de l'analyse dont on peut tirer des résultats intéressants et enrichissants par des méthodes à la fois rigoureuses et tout à fait élémentaires. D'abord, il faut définir une fonction convexe indépendamment de la notion de dérivée, et il me semble que la définition géométrique au moyen de la corde serait la plus simple. On démontre ensuite, par des arguments géométriques mais parfaitement rigoureux, que

1. Une fonction  $f$  est convexe si et seulement si, pour tout point  $(a, f(a))$  sur le graphe de  $f$ , la pente de la sécante

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \neq a,$$

est croissante avec  $x$ .

On en conclut immédiatement qu'une fonction convexe et finie a une dérivée finie à droite et une dérivée finie à gauche en tout point intérieur et qu'elle est continue. En supposant encore que la fonction ait une dérivée unique, on obtient ensuite sans difficulté que cette dérivée est une fonction croissante, et maintenant comme critères :

2. Une fonction  $f$  dérivable est convexe si et seulement si le graphe de  $f$  est situé au-dessus de ses tangentes.

3. Une fonction  $f$  continue est convexe si et seulement si, pour tout couple de points  $x_1, x_2$ , on a

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)).$$

Je crois qu'on obtient la démonstration la plus simple du dernier critère important par subdivision successive d'un intervalle donné. Toutes ces propriétés, dont aucune n'exige le théorème des accroissements finis, sont bien connues, et je renvoie pour plus de détails à la présentation excellente donnée par BOURBAKI dans le Livre IV, chap. I, Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire).

Si l'on sait d'avance qu'une fonction est une ou deux fois dérivable, on peut énoncer des critères de convexité commodes. Il faut remarquer cependant que ces critères exigent, pour leur démonstration, le théorème des accroissements finis. Ainsi, par exemple, si  $f'$  est croissant  $f$  est convexe en vertu de 2.; car la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

a le minimum zéro pour  $x = a$ .

L'introduction des fonctions convexes sans faire appel à la dérivée mais seulement à des propriétés géométriques très simples a encore l'avantage qu'on peut employer la convexité pour prouver l'existence des dérivées, comme on le sait déjà de la théorie générale. L'exemple classique est la fonction exponentielle  $a^x$ , définie d'abord pour des exposants rationnels et prolongée par continuité. Elle est convexe et elle a la dérivée  $f'(a) a^x$ , où

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow +0} (a^x - 1)/x = \lim_{x \rightarrow +0} (a^{-x} - 1)/(-x).$$

Les limites existent en vertu de la convexité, et on conclut ensuite facilement qu'on peut choisir  $a$  de telle façon que  $f(a) = 1$ .

Remarquons enfin qu'il y a d'autres méthodes pour introduire la fonction exponentielle, méthodes qui s'appuient aussi plus ou moins sur la convexité. Ainsi, de l'identité algébrique

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$$

$n$  étant un entier positif, on obtient d'abord que la fonction  $x^n$  est convexe pour  $x > 0$  et qu'elle a la dérivée  $nx^{n-1}$ . Alors, le graphe est situé au-dessus de la tangente, ce qui, pour  $x = 1$ , entraîne l'inégalité

$$\xi^n \geq 1 + n(\xi - 1) = n\xi - (n - 1),$$

valable au moins pour  $\xi > 0$ . Pour  $\xi = a/b$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres positifs, cette inégalité s'écrit

$$a^n \geq (na - (n - 1)b) b^{n-1}.$$

En posant enfin  $a = 1 + x/n$ ,  $b = 1 + x/(n-1)$ ,  $x > -(n-1)$ , on obtient

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1},$$

ce qui montre que la suite des fonctions

$$e_n(x) = (1 + x/n)^n$$

va en croissant pour tout  $x$  réel. On démontre ensuite que la limite est finie pour tout  $x$  et que la fonction limite satisfait à toutes les propriétés de la fonction exponentielle. La déduction de la dérivée est aussi facile. Cette méthode peut paraître artificielle, mais elle a l'avantage de rattacher l'introduction de la fonction exponentielle à ce qu'on appelle intérêt instantané.

Institut Mittag-Leffler  
Djursholm, Suède.