SYMPOSIUM SUR L'HARMONISATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES UNIVERSITÉS D'EUROPE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

SYMPOSIUM SUR L'HARMONISATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES UNIVERSITÉS D'EUROPE

Paris, 3-5 octobre 1960

Ce symposium, organisé par l'Association Européenne des Enseignants, groupait des représentants de l'Allemagne, la Belgique, le Danemark, la France, l'Italie, les Pays-Bas, la Suède et la Suisse.

Le but du Symposium était d'étudier les possibilités d'harmonisation de l'enseignement des Mathématiques dans les Universités d'Europe, afin de pouvoir faciliter ultérieurement la solution du difficile problème de l'équivalence des diplômes universitaires et de rendre possible, sur une échelle beaucoup plus vaste qu'aujourd'hui, les échanges d'étudiants entre Universités pendant le cours de leurs études fondamentales. Ainsi pourrait se créer peu à peu une véritable communauté européenne des étudiants.

Les participants du symposium ont précisé le programme de base pour les mathématiques, qu'ils souhaitent obligatoire dans toutes les Universités européennes. A ce programme pourrait s'ajouter des matières à option, variable suivant les Universités (mécanique, calcul des probabilités, physique mathématique, ...).

Ce programme reproduit ci-dessous, est réparti en deux parties de niveaux différents: le niveau propédeutique et le niveau licence. Chacune de ces parties est subdivisée en blocs. Ce découpage n'a pas pour objet d'imposer une organisation déterminée de l'enseignement mathématique dans les Universités européennes, mais de faciliter la comparaison des connaissances acquises par les étudiants de pays différents.

Les participants au symposium se sont engagés à soumettre ces conclusions aux collègues de leurs pays et à essayer de les faire adopter par le plus grand nombre possible.

TABLEAU I.

Programme de propédeutique

1. *Notions générales d'algèbre.*

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions. Ensembles finis et analyse combinatoire.

Entiers rationnels, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble, relations d'équivalence relations d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps.

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes.

Formule du binôme. Division suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur. Division suivant les puissances croissantes.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'Alembert. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. *Géométrie analytique classique à 2 et 3 dimensions.*

Equation des droites, plan, cercle, sphère.

Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3.

Etude des courbes planes données sous la forme $y = f(x)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou à l'infini.

Coordonnées polaires.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques.

Génération et représentation de surfaces diverses. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple).

3. *Algèbre linéaire (niveau 1).*

Définition des espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Produits d'espaces vectoriels et somme de sous espaces vectoriels. Indépendance linéaire. Base dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Définition des applications linéaires, somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires. Déterminants.

Vecteurs et valeurs propres. Equation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

Espaces affines, parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R, norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de Schwarz. Bases orthonormales dans R^n. Réduction d'une forme quadratique.

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point, angle de deux vecteurs, orientations de R^n, produit vectoriel dans R^3.

4. *Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire.*

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles des nombres réels: majorants, minorants. Bornes supérieures et inférieures, intervalles. Suite bornées. Suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de Cauchy. Théorème de Bolzano - Weierstrass.

Fonctions d'une variable réelle, limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones, existence de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction réciproque, d'une fonction composée.

Théorème de ROLLE. Théorème des accroissements finis. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions d'une variable.

Fonctions trigonométriques directes et réciproques d'une variable réelle. Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques. Notations « O » et « o ». Comparaison des croissances de deux fonctions.

Développements limités, applications.

Fonction vectorielle d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de Taylor.

Fonctions de plusieurs variables. Continuité.

Fonctions différentiables en un point, différentielle en ce point.

Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivées d'une fonction composée. Interprétation géométrique : tangente, plan tangent, calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'ordre supérieur, permutabilité.

Formule de Taylor.

5. *Calcul intégral et séries.*

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de Riemann. Intégrabilité des fonctions continues et des fonctions monotones. Rapport entre intégrale définie et fonctions primitives. Propriété de la forme linéaire définie par l'intégrale. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle quelconque (éventuellement infini); convergence, convergence absolue.

Séries à termes réels ou complexes, convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs. Comparaison; séries à termes positifs décroissants, comparaison avec une intégrale. Ordre de grandeur du reste.

Séries absolument convergentes.

Séries convergentes non absolument, séries alternées.

Suites et séries de fonctions, convergence simple et convergence uniforme.

Continuité, dérivation et intégration dans le cas de la convergence uniforme.

Séries entières d'une variable complexe. Cercle de convergence.

Dérivation et intégration dans le domaine réel.

Développements en séries de e^x, sin x, cos x, log $(1 + x)$ $(1 + x)^a$, arc tg x, arc sin x. Définition et propriétés simples de e^z, sin z, cos z (z complexe), log z.

Calcul numérique: principes généraux, erreurs, résolution d'équations à une inconnue, calcul d'intégrales définies; notion sur la rapidité de convergence d'une série et sur l'ordre de grandeur du reste, calcul des sommes de séries.

Notions élémentaires sur les séries de Fourier.

Longueur d'une courbe paramétrée, expression de la longueur pour une paramétrisation continuement dérivable.

Intégrales curvilignes.

Intégrales doubles, triples, on ne fera qu'une étude élémentaire dans des cas bien limités. On énoncera sans démonstration la formule du changement de variable.

Formule de Riemann dans le plan. Période des intégrales curvilignes planes.

Primitives des différentielles exactes.

6. *Types d'équations différentielles.*

Notions sur les équations différentielles. Equations du premier ordre à variables séparées. Equations linéaires du premier ordre. Equations linéaires à coefficients constants avec ou sans second membre.

Changements de variable ou de fonctions, exemples.

7. *Géométrie différentielle et cinématique.*

Vitesse et accélération d'un mobile.

Etude de la trajectoire au voisinage d'un point mobile. Plan osculateur, courbure. Accélération tangentielle et accélération normale.

Compositions des vitesses et des accélérations.

Centres de gravité. Moments d'inertie.

Théorèmes du centre de gravité et du moment cinétique pour un système de points matériels et pour un solide.

TABLEAU II

Programme de Licence

1. *Algèbre des ensembles.*

Notions élémentaires sur le calcul logique.

Opérations sur les ensembles, notations; produit d'ensemble.

Application d'un ensemble dans un autre; image directe, image réciproque, formules..

Relations binaires: relation d'ordre, relation d'équivalence.

Notions sur les cardinaux, puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix; théorème de Zorn (sans démonstration).

2. *Algèbre* (niveau 2).

Lois de composition; propriétés (associativité, etc. ...).

Groupes; sous-groupes, groupes quotients; théorème d'homomorphisme. Exemples: Z/nZ, R/Z. Plongement d'un ensemble muni d'une loi commutative et associative, régulière, dans un groupe; exemples. Produit de groupes, produits directs de sous-groupes.

Groupe symétrique: signature d'une permutation.

Groupe de transformations; transitivité (simple ou non), trajectoires; exemples. Exercice possible: théorème de Sylov.

Anneaux et algèbres; idéaux; anneau-quotient. Exemples (quaternions).

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs variables.

Corps, règles de calcul. Caractéristique d'un corps.

3. *Algèbre linéaire (niveau 2).*

Revision de l'algèbre linéaire (niveau 1).

Bases d'un espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

Dualité des espaces de dimension finie; application aux équations linéaires.

Valeurs propres d'une application linéaire ou d'une matrice réduction à la forme triangulaire (corps complexe).

Eléments d'algèbre extérieure.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes; orthogonalité formes quadratiques, réduction à une somme de carrés. Loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

4. *Topologie générale.*

Topologie de R, de R^n; Heine-Borel.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts, ou par les fermés); exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produits d'espaces topologiques.

Espaces compacts, théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Critère de connexion pour les espaces métriques compacts.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion) méthode des approximations successives.

Famille sommabled ans un espace vectoriel topologique (ou même dans un groupe abélien topologique); cas d'un espace normé complet: convergence normale.

5. *Espaces fonctionnels.*

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique, cas où ce dernier est complet, cas des applications continues.

Espaces vectoriels normés, espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen de l'intégrale.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens: exemples. Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet, et plus généralement sur un convexe complet la projection est une application contractante.

Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation de Schmidt. Applications: suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

6. *Intégration.*

Intégrale (Lebesgue ou Riemann) de fonctions numériques définies dans R^n. Théorème de Fubini (intégrations successives). Changement de variables. Application: calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant d'un paramètre: continuité, dérivation, intégration. Nombreux exercices comportant des contre-exemples !

7. *Calcul différentiel.*

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés; calcul.

Théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment différentiables.

Formules différentielles; notions de calcul différentiel extérieur. Formule de Stokes dans des cas simples. Primitive locale d'une forme différentielle fermée de degré 1.

Systèmes différentiels: existence et unicité locales dans le cas lipschitzien. Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel: résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire de premier ordre.

Eléments du calcul des variations.

8. *Fonctions analytiques d'une variable complexe.*

Séries entières formelles, séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent; principe du maximum, résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω; critère de compacité conforme.

Représentation conforme.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis: exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Systèmes différentiels holomorphes: méthode des majorantes. Notions sur les surfaces de Riemann, exemples.

9. *Géométrie différentielle des courbes et surfaces de R^3*

Notamment: les deux formes fondamentales d'une surface; méthode du repère mobile; courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique. Géodésiques. Courbure totale d'une surface, et peut-être formule de GAUSS-Bonnet.

10. *Bloc élémentaire.*

Théorie des entiers naturels, opérations, divisibilité, nombres premiers, théorème d'unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels: caractérisation axiomatique et existence. Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Géométrie de R^2 ou R^3 muni du produit scalaire canonique: déplacements, angles, orientation. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes.

Axiomatisation de la géométrie euclidienne: notions succinctes.

Constructions avec la règle et le compas.