Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: 50e ASSEMBLÉE ANNUELLE DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

50e ASSEMBLÉE ANNUELLE DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

à Bienne, le 23 septembre 1961, dans le cadre de la 141e assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles.

Président: Professeur Dr H. Jecklin, Université de Zurich.
Vice-Président: Professeur Dr B. Eckmann, EPF, Zurich.
Secrétaire: Professeur Dr J. de Siebenthal, EPUL, Lausanne.

A 8 h. 45, M. Jecklin, président, ouvre la séance, dans l'auditoire no 25 du Technicum.

1. Communications selon liste annexée.
2. Séance administrative.

M. Jecklin, président, excuse M. Eckmann et M. Burckhardt, à l'étranger; il rapport sur l'activité de la SMS et notamment sur la séance de printemps. Il signale qu'un nouveau contrat a été passé avec Orell-Füssli, Zurich, au sujet des *Commentarii*. Les comptes du Jubilé du cinquantenaire présentent un bénéfice qui sera judicieusement utilisé. Le Congrès international 1962 aura lieu à Stockholm du 15 au 22 août; adresse: International Congress of Mathematicians, Djursholm 1, Sweden.

Nouveaux membres selon liste annexée.

Le Secrétaire-caissier donne connaissance des comptes de la Société pour 1960, et M. le Professeur Dr Methée, vérificateur, indique que ces comptes sont en ordre. L'assemblée donne décharge au secrétaire-caissier et aux vérificateurs, sans opposition.

Elections. Sont élus pour 1962-1963:

Président: Professeur Dr B. Eckmann, EPF, Zurich.
Vice-Président: Professeur Dr J. de Siebenthal, EPUL, Lausanne.
Secrétaire-caissier: Professeur Dr H. Huber, Bâle.

Nouveaux membres:

Professeur S. Kobayashi, Vancouver, Canada.
Professeur H. Thomas Southard, Haywerd, California, USA.
Jos. D. Feldmann, Benton Harbar, Michigan, USA.
Professeur Aaron Galuten, New-York, N.Y., USA.
Leonard S. Charlap, New-York, N.Y., USA.
Alvin Hausner, New-York, N.Y., USA.

V. W. GRAHAM, Dublin.
Gordon L. WALKER, Providence, R.I., USA.
Mlle Margrit FREI, Zurich.
Mlle Monica EDER, Zurich (à vie).
Malcolm W. OLIPHANT, Georgetown University, Washington 7, D.C.
Joseph A. WOLF, Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. U.S.A.

A passé *membre libre*: A. KAUFMANN, membre depuis 1935.

Décès: P. BIDAL, Lonay-sur-Morges.
L. JECKLIN, Basel.

Démission: A. Challand, membre depuis 1946.

Communications

S. PICCARD: *Sur la théorie des groupes.*
C. TANNER: *La symétrie locale des ensembles et fonctions arbitraires.*
P. KÜENZI: *Betrachtungen zur nichtlinearen Programmierung.*
D. KOLLER: *Prüfung der Normalität einer Verteilung.*
K. VOSS: *Flächen mit vorgegebenen Hauptkrümmungen.*
J. HERSCH: *Une interprétation du principe de Rayleigh-Poincaré et d'une méthode de Weinstein-Bazley-Aronszajn à l'aide d'hyperquadratiques associées.*
H. R. SCHWARZ: *ALGOL, die internationale Formelsprache.*
B. SCARPELLINI: *Probleme der Axiomatisierbarkeit in der unendlichwertigen Logik.*
S. PICCARD: *Un problème de la théorie des ensembles.*

1. Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Théorie des groupes. — Systèmes irréductibles d'éléments d'un groupe. — Les groupes fondamentaux, leurs bases et leurs éléments fondamentaux.*

Soit G un groupe multiplicatif d'ordre quelconque, fini ou infini, soit A un ensemble d'éléments de G et soit G^* le sous-groupe propre ou non de G qu'il engendre. Nous disons que l'ensemble A est irréductible si, quel que soit le sous-ensemble *fini* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de A comprenant un nombre $k \geqq 2$ éléments, il n'existe, dans G^*, aucun sous-ensemble $b_1, b_2, \ldots, b_l$ formé d'un nombre $l < k$ d'éléments du groupe G^* et tel que l'ensemble $(A - [a_1, a_2, \ldots, a_k]) \cup [b_1, b_2, \ldots, b_l]$ soit encore générateur de G^*.

Nous disons que le groupe G est fondamental s'il possède au moins un système irréductible d'éléments générateurs et nous appelons base d'un groupe fondamental tout système irréductible de ses éléments générateurs. *Tout groupe d'ordre fini, tout groupe qui possède des*

systèmes finis d'éléments générateurs, tout groupe libre, tout groupe quasi libre sont des groupes fondamentaux. Mais il existe aussi une infinité de groupes non fondamentaux. Ainsi le groupe $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ de transformations des nombres entiers dont les éléments sont toutes les substitutions (de classe paire) d'un nombre fini quelconque d'entiers quelconques n'est pas fondamental.

Nous disons qu'un élément d'un groupe fondamental G est fondamental s'il fait partie d'une base au moins de ce groupe. Tout groupe fondamental possède aussi bien des éléments fondamentaux que des éléments qui ne le sont pas. En particulier l'élément neutre du groupe n'est pas fondamental. Tout groupe cyclique est fondamental. S'il est d'ordre infini et se compose de toutes les puissances entières d'un élément a, il n'a que deux éléments fondamentaux a et a^{-1}. S'il est d'ordre fini n et se compose des éléments $a^1, a^2, \ldots, a^n$, quel que soit l'entier m ($1 \leqq m < n$) premier avec n, l'élément a^m est fondamental. Si le groupe G est libre, tout élément libre de G est fondamental et, si G est quasi libre, tout élément quasi libre de G est fondamental et il n'y en a pas d'autres. Quel que soit l'entier $n > 1$ tout élément $\neq 1$ du groupe symétrique S_n et du groupe alterné A_n de degré n est fondamental, à la seule exception des trois doubles transpositions du groupe S_4 qui ne font partie d'aucune base de ce groupe.

Soit G un groupe fondamental ou non et soit G^* un sous-groupe de G. Nous disons que G^* est un sous-groupe fondamental de G si G^* possède des systèmes irréductibles d'éléments générateurs.

Tout groupe G d'ordre > 1 possède des sous-groupes fondamentaux parmi lesquels figurent les sous-groupes cycliques engendrés par ses divers éléments d'ordre > 1. Tout sous-groupe d'ordre > 1 d'un groupe fondamental n'est pas forcément fondamental. Ainsi le groupe non fondamental $\mathfrak{A}$ cité plus haut est un sous-groupe du groupe quasi libre engendré par les deux transformations des nombres entiers $a = (\ldots, -3, -1, 0, 1, 3, \ldots)$ et $b = (\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots)$. L'union et l'intersection de deux sous-groupes fondamentaux d'un groupe G peuvent être dépourvus de base, de sorte que l'ensemble des sous-groupes fondamentaux d'un groupe G n'a en général pas une structure de treillis.

Nous disons qu'un groupe fondamental G est décomposé en produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ, $\lambda \in \Lambda$, et nous écrivons $G = \prod_{\lambda \in \Lambda}^{**} G$ si, quelle que soit la base A du groupe G_λ, l'ensemble $A = \bigcup_{\gamma \in \Lambda} A_\lambda$ constitue une base de G. Tout groupe fondamental est susceptible d'une telle décomposition. En particulier, il est le produit quasi libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de l'une quelconque de ses bases. Les facteurs G_λ, $\lambda \in \Lambda$ sont appelés les facteurs quasi libres de G. Tout élément fondamental d'un facteur quasi libre G_λ est aussi un élément fondamental du

groupe G. Aucun élément fondamental d'un facteur quasi libre G_λ ne peut faire partie du groupe engendré par tous les autres facteurs de la décomposition de G en produit quasi libre dont fait partie le facteur G_λ.

Soit G un groupe fondamental, soit $G = \prod_{\lambda \in \Lambda}^{**} G_\lambda$ sa décomposition en produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ, soit γ_λ un sous-groupe fondamental quelconque de G_λ, quel que soit $\lambda \in \Lambda$, et soit γ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des éléments des groupes γ_λ. Ce groupe γ n'est pas nécessairement le produit quasi libre des groupes γ_λ. En effet, soit, par exemple, G le groupe abélien engendré par les trois substitutions $a = (1, 2)$, $a_2 = (3, 4)\ (5, 6, 7)$, $a_3 = (8, 9)\ (10, 11, 12)\ (13, 14, 15, 16, 17)$. Ce groupe G, d'ordre 360, est le produit quasi libre des groupes cycliques g_1, g_2, g_3 engendrés par a_1, a_2 et a_3. Soit $\gamma_1 = g_1$, soit γ_2 le sous-groupe cyclique de g_2 engendré par la substitution $(5, 6, 7) = a_2^4$ et soit γ_3 le sous-groupe cyclique de g_3 engendré par la substitution $(13, 14, 15, 16, 17) = a_3^6$. Désignons par γ le sous-groupe de G, produit de γ_1, γ_2 et γ_3. Le groupe γ est cyclique, donc à base d'ordre 1, et par suite il n'est pas le produit quasi libre de γ_1, γ_2 et γ_3.

Si g est un sous-groupe fondamental d'un groupe fondamental G, il n'est pas toujours possible de décomposer G en produit quasi libre dont g soit l'un des facteurs. En voici un exemple. Soit G le groupe libre engendré par les deux éléments libres a_1 et a_2, et soit g le sous-groupe de G engendré par les deux éléments a_1^2 et a_2^3. g est un groupe libre à base du second ordre et il est impossible de décomposer G en produit quasi libre dont g soit l'un des facteurs, car l'existence d'une telle décomposition impliquerait que G est à base d'ordre $\geqq 3$, ce qui n'est pas.

Soit G un groupe fondamental dont un élément fondamental a appartient à un sous-groupe fondamental g de G. L'élément a n'est alors pas nécessairement fondamental dans g. En effet, soit par exemple, G le groupe symétrique des substitutions des éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et soit $a = (1, 2)\ (3, 5)\ (4, 7)\ (6, 8)$. a est un élément fondamental de G qui, comme on sait, est à base du second ordre, et on obtient une base de G en associant à a l'élément $b = (1, 3)\ (5, 7, 8)$.

Considérons le sous-groupe g d'ordre 1344 de G, engendré par les deux éléments $a' = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, $b' = (1, 3)\ (4, 8)$. On démontre sans peine qu'aucune des sept substitutions $a'^i a a'^{-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ ne fait partie d'une base de g. Ce sont des éléments non fondamentaux de g. Donc, en particulier, a qui fait partie de g n'est pas un élément fondamental de ce groupe.

La réciproque est également vraie: si g est un sous-groupe fondamental d'un groupe fondamental G, un élément fondamental de g n'est pas nécessairement fondamental dans G. En effet, soit, par

exemple, G le groupe quasi libre de transformations des nombres entiers engendré par les deux transformations $a = (\ldots, -3, -1, 0, 1, 3, \ldots)$, $b = (\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots)$, dont la première permute tous les nombres impairs et 0 et la seconde permute tous les nombres pairs. Le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par le cycle $(-2, 0, 2)$ appartient à ce groupe. C'est un sous-groupe fondamental de G, dont le cycle $(-2, 0, 2)$ est un élément fondamental. Or, il ressort de la théorie des groupes quasi libres que le cycle $(-2, 0, 2)$ n'est pas un élément fondamental de G.

Quel que soit le groupe fondamental G, quelle que soit la base A de G et quel que soit le sous-ensemble A^* de A, le groupe G^* engendré par A^* est fondamental et tout élément fondamental de G^* est aussi un élément fondamental de G.

2. R. C. H. Tanner, Ph.D. (Londres, Angleterre). — *La symétrie locale des fonctions et ensembles arbitraires.*

Un *ensemble ponctuel linéaire* étant donné, on peut parler de symétrie ou dissymétrie locale au point P en se référant aux points de l'ensemble voisins de P: au cas où P serait point limite d'un côté, mais pas de l'autre, on dira que P est point de dissymétrie locale de l'ensemble, ou, pour abréger, un point dissymétrique de l'ensemble. On sait alors que *les points dissymétriques d'un ensemble linéaire quelconque sont au plus dénombrables.* Cette propriété découle essentiellement du théorème énoncé en 1882 par Georg Cantor: tout ensemble d'intervalles sans points intérieurs communs deux à deux est dénombrable.

Pour un *ensemble plan*, on envisage tout d'abord la symétrie par rapport à une sécante donnée. Un point P de cette sécante qui serait point limite de l'ensemble d'un seul côté de la sécante serait *point de dissymétrie locale par rapport à la sécante donnée.* Une sécante comprenant un tel point peut être désignée *sécante dissymétrique* de l'ensemble. *Les sécantes dissymétriques parallèles à une direction fixe quelconque sont au plus dénombrables.*

D'où l'énoncé équivalent relatif à une fonction $f(x)$ réelle quelconque d'une seule variable réelle:

$$\operatorname*{limm}_{h \downarrow 0} f(x+h) = \operatorname*{limm}_{h \downarrow 0} f(x-h)$$

en exceptant tout au plus une infinité dénombrable de valeurs de x. L'égalité s'entend au sens d'identité entre la pluralité de valeurs à gauche et la pluralité de valeurs à droite. La fonction $f(x)$ elle-même peut prendre une *pluralité de valeurs quelconques* pour chaque valeur de x. Ses valeurs limites se définissent comme pour une fonction univoque, en se reportant de préférence à la représentation de la fonction

sur le plan, c'est-à-dire á l'ensemble plan arbitraire dont on s'est occupé en premier lieu.

Pour une fonction univoque, ce théorème fut découvert en 1908 par W. H. Young (*Rend. r. Acc. Lincei*, vol. XVII, série 5a). Vingt ans après, il le précisa en y faisant figurer, outre les valeurs limites, la valeur intrinsèque de la fonction en x. Avec le même ordre d'exceptions, et en utilisant, pour une pluralité de limites unilatérales, la notation usuelle pour une limite unilatérale unique, on a

$$f(x) \subset f(x+0) = f(x-0).$$

A ce résultat, énoncé dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, tome 52 (1928), se joignent des raffinements et extensions qui peuvent sauter aux yeux, aujourd'hui que la théorie des ensembles est largement acquise. D'une part, la symétrie bilatérale dans le plan ayant été analysée au moyen d'un filtre à trames rationnelles *rectangulaires*, on n'a qu'à prendre des trames *triangulaires* pour aboutir à ce résultat qu'*en presque tout point d'un ensemble plan arbitraire, il y a, au sens local, symétrie quasi-radiale complète autour du point*, c'est-à-dire que toute direction issue de ce point y sera « tangente » à l'ensemble. Les points exceptionnels gisent sur une infinité dénombrable tout au plus de courbes monotones, de mesure plane nulle.

D'autre part, on passe sans peine de deux à n dimensions. L'énoncé précédent, par exemple, reste valable, les points exceptionnels formant un ensemble de mesure nulle dans cet espace, disposé de façon analogue sur des hypersurfaces à $(n-1)$ dimensions, dénombrables tout au plus.

Les théorèmes concernant les fonctions entièrement arbitraires sont rares. Il doit paraître bien surprenant qu'on puisse établir à si peu d'exceptions près la symétrie locale pour de telles fonctions. Comme le disait Young dans son préambule de 1928: « On croirait volontiers qu'en dehors de toute hypothèse, il ne peut être question de rechercher des propriétés ».

Si surprenantes que semblent ces propriétés, les faits eux-mêmes sont plus étonnants encore. La découverte fondamentale passa presque inaperçue, non seulement en 1908, mais lorsqu'elle fut refaite, en principe, par H. Blumberg en 1918 (*Am. Math. Soc. Bull.* 24), et même lors de la mise au point finale de Young en 1928; et cela malgré plusieurs travaux apparentés de W. H. et G. C. Young (*Quart. J. P. A. Maths.* 160, 1909; *Proc. Lon. Math. Soc.* 1909 et 1916) et de Kempisty (*Fund. Math.* 1924). En 1930, Blumberg, enfin saisi de la priorité des Young, reprend, élabore, aligne avec ses propres variantes celles des Young et de Kempisty (*Fund. Math.* 1930), sans pourtant se mettre en rapport personnel avec Young, si bien que, lorsque Blumberg reprit le thème une dernière fois en 1938 (*Fund. Math.* 32), et s'engagea dans des critiques assez maladroites, Young,

déjà âgé, n'en sut toujours rien. Puis, une fois de plus, le thème s'éclipsa.

C'est dans un nouveau cadre qu'il vient de renaître, celui des *cluster sets* de Seidel et des *bouts premiers* de Carathéodory, auxquels avait conduit la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe pendant le premier quart de notre siècle. A tour de rôle, Lindelöf, Iversen, l'infortuné Gross, Plessner, Seidel, se mirent à en développer l'analyse fort complexe, où l'on chercha à mettre ordre par la classification de points frontières de divers degrés de simplicité.

Et voilà que les propriétés de symétrie locale ressurgissent spontanément, dans un domaine qui ignorait encore tout des recherches par trop générales dans le domaine réel. Soudain, les résultats et surtout les méthodes de Young s'avisèrent non seulement appropriés, mais bien plus efficaces que l'appareil usuel. Grâce à eux, on peut, en résumé, s'attendre à une *symétrie approchée presque partout*, du moment qu'on se place dans un espace mesurable séparable, sans plus, les exceptions se classifiant d'une façon dénombrable bien définie, et se réduisant, au cas linéaire, à un ensemble dénombrable tout court.

Le résultat pour les « cluster sets » frontières $C(f,P)$ d'une fonction $f(z)$ de variable complexe, qui n'exige donc plus l'analyticité ni même la continuité de $f(x)$ dans le domaine d'existence donné, et admet au surplus pour $f(x)$ une pluralité de valeurs en tout point, figure dans un article tout récent de E. F. Collingwood (*Proc. Nat. Ac. Sc.* 49, 1960), explicité pour le cas d'une fonction *univoque* dans le *cercle unité*; ces restrictions sans importance se rattachent aux études sur les *bouts premiers* qu'il vient d'arrondir en collaboration avec Piranian (*Math. Ann.* 144, 1961), en montrant par des exemples la finalité des résultats obtenus. D'autre part, les remarques plus générales de Collingwood sur l'application de la méthode de Young emboîtent clairement l'extension aux fonctions à valeurs vectorielles plurivoques quelconques d'une variable vectorielle générale.

C'est là, en fin de compte, un thème d'intérêt actuel qui, mieux que toute propriété élémentaire ou banale, range les mathématiques à côté des sciences biologiques, physiques et autres dans le cadre proposé à ses conférenciers par la Société helvétique des sciences naturelles pour sa réunion annuelle de Bienne (septembre 1961). Je pense qu'il était donc bien de rigueur d'attirer l'attention, par cette occasion, sur un phénomène toujours encore trop peu remarqué, par lequel l'activité mathématique participe à ce trait curieux de la perception humaine: qui du fortuit fait naître la loi, et sait de l'arbitraire tirer *Symétrie et forme.*

6. Joseph HERSCH (Institut Battelle, Genève): *Une interprétation du principe de Rayleigh-Poincaré et d'une méthode de Weinstein-Aronszajn-Bazley à l'aide d'hyperquadriques associées.*

1. Considérons un espace vectoriel ou fonctionnel doué d'un produit scalaire $< u, v >$ induisant une norme $< v, v > = \| v \|^2 \geqq 0$; et dans cet espace un opérateur linéaire self-adjoint A induisant une forme quadratique $A(v, v) = < Av, v >$ (non semi-définie négativement). Le quotient de Rayleigh est défini par $R^A[v] = A(v, v) / \| v \|^2$; ses valeurs stationnaires sont les valeurs propres discrètes de A: $\lambda_1^A \leqq \lambda_2^A \leqq \lambda_3^A \leqq \ldots$; nous supposons qu'elles forment la partie inférieure du spectre de A; nous désignons par $u_1, u_2, u_3, \ldots$ les vecteurs propres correspondants.

2. Nous *associons* à la forme quadratique A l'hyperquadrique $Q_A = \{ v \mid A(v, v) \leqq 1 \}$. Si $A \geqq 0$, les demi-axes de Q_A sont $\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \geqq \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \geqq \lambda_3^{-\frac{1}{2}} \geqq \ldots$ — Soit $B(v, v)$ une autre forme quadratique (dans le même espace); il est clair que $B \geqq A$ si et seulement si $Q_B \subset Q_A$.

Le problème de l'évaluation des valeurs propres λ_i^A peut être considéré ainsi: Trouver des formes quadratiques $B^- \leqq A$ et $B^+ \geqq A$ à valeurs propres connues; alors $\lambda_i^{B^-} \leqq \lambda_i^A \leqq \lambda_i^{B^+}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, conditions équivalentes: $Q_{B^-} \supset Q_A \supset Q_{B^+}$.

3. *Interprétation du principe de Rayleigh.* — Choisissons arbitrairement un vecteur w; nous définissons la forme quadratique B^+ par $B^+(w, w) = A(w, w)$ et $B^+(v, v) = +\infty$ pour tout $v \perp w$ (donc aussi pour tout v non parallèle à w).

$B^+ \geqq A$, ce que montre aussi $Q_{B^+} \subset Q_A$: *Q_{B^+} est une hyperquadrique dégénérée sur un diamètre de Q_A, tous ses axes sont nuls sauf un seul* (de direction w). $\lambda_1^{B^+} = R^A[w]$, $\lambda_2^{B^+} = \lambda_3^{B^+} = \ldots = +\infty$. L'inégalité $\lambda_1^A \leqq \lambda_1^{B^+} = R^A[w]$ est essentiellement le principe de *Rayleigh.*

4. *Interprétation du principe de Poincaré.* — Plus généralement, choisissons arbitrairement un sous-espace linéaire L_n à n dimensions,

Nous définissons $\begin{cases} B^+(v, v) = (\max_{t \in L_n} R^A[t]) \cdot \|v\|^2 \text{ si } v \in L_n. \\ B^+(v, v) = +\infty \text{ si } v \perp L_n. \end{cases}$

$B^+ \geqq A$, $Q_{B^+} \subset Q_A$; en effet, *Q_{B^+} est dégénérée sur un disque à* n *dimensions, contenu dans* Q_A *et dans* L_n.

$\lambda_1^{B^+} = \lambda_2^{B^+} = \ldots = \lambda_n^{B^+} = \max_{t \in L_n} R^A[t]; \lambda_{n+1}^{B^+} = \lambda_{n+2}^{B^+} = \ldots = +\infty$.

L'inégalité $\lambda_n^A \leqq \lambda_n^{B^+} = \max_{t \in L_n} R^A[t]$ est essentiellement le principe de Poincaré. *Si $\lambda_n^A \geqq 0$, $1/\sqrt{\lambda_n^A}$ est le rayon du plus grand disque à* n *dimensions contenu dans* Q_A.

5. *Premier pas de la méthode de Weinstein-Aronszajn-Bazley.* — Admettons que l'opérateur A se laisse décomposer en $A = A^o + A'$ avec $A' \geqq 0$, les valeurs propres $\lambda_1^o \leqq \lambda_2^o \leqq \lambda_3^o \leqq \ldots$ de A^o étant connues, ainsi que les vecteurs propres correspondants u_1^o, u_2^o, u_3^o, ... Nous définissons un opérateur auxiliaire B^- par $B^- = A^o + C^-$; un choix particulièrement simple de C^- correspond au premier pas de Bazley: $C^- u_n^o = c^- u_n^o$, $C^- u_i^o = 0$ pour tout $i \neq n$. B^- et C^- ont les mêmes vecteurs propres que A^o, B^- a les valeurs propres $\lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_{n-1}^o, \lambda_n^o + c^-$, $\lambda_{n+1}^o, \lambda_{n+2}^o, \ldots$ (pas nécessairement ici par ordre de grandeur). La condition $B^- \leqq A$ signifie $C^- \leqq A'$, soit $Q_{C^-} \supset Q_{A'}$; Q_{C^-} est dégénérée, sa frontière est une paire d'hyperplans de demi-distance $1/\sqrt{c^-}$; on choisit de préférence Q_{C^-} bitangente à $Q_{A'}$; *un simple raisonnement géométrique montre qu'alors* $c^- = \| u_n^o \|^2 / < A'^{-1} u_n^o, u_n^o >$; d'où notamment $\lambda_n^A \geqq \lambda_n^{B^-} = \min \{ \lambda_n^o + (\|u_n^o\|^2 / < A'^{-1} u_n^o, u_n^o >); \lambda_{n+1}^o \}$, en plein accord avec Bazley. (Cette borne inférieure $\lambda_n^{B^-}$ est meilleure que λ_n^o.)

6. Ces considérations géométriques se laissent généraliser et suggèrent quelques assouplissements de la méthode. — On voit également qu'*un problème auxiliaire fournissant une borne optimale pour* λ_n, *fournit souvent une borne triviale pour les autres valeurs propres*, par exemple: $\lambda_1^{B^-} = \lambda_2^{B^-} = \ldots = \lambda_{n-1}^{B^-} = -\infty$, $\lambda_n^{B^-} = \lambda_{n+1}^{B^-} = \ldots = \lambda_{n+p}^{B^-}$; et de même: $\lambda_1^{B^+} = \lambda_2^{B^+} = \ldots = \lambda_n^{B^+}$, $\lambda_{n+1}^{B^+} = \lambda_{n+2}^{B^+} = \ldots = +\infty$ (Poincaré, cf. § 4): B^- *et* B^+ *sont alors construits en vue d'évaluer par défaut le seul* λ_n^A.

Ces idées ont d'abord été exprimées dans une note de l'Institut Battelle, polycopiée en avril 1961.

7. H. R. Schwarz, Zürich. *ALGOL, die internationale Formelsprache.*

Nachdem die modernen elektronischen Rechenanlagen mit ihren hohen Rechengeschwindigkeiten eine grosse Verbreitung und Anwendung gefunden hatten, da merkte man allmählich, dass die Vorbereitung eines Problems bis zu dem Moment, wo die Maschine imstande ist es mit Hilfe eines Programms zu lösen, mit grossem Arbeitsaufwand verbunden ist. Das hängt einmal damit zusammen, dass die sogenannte Maschinensprache sehr stark von der gewöhnlichen mathematischen Formulierung abweicht. Anderseits unterscheiden sich auch die Maschinensprachen bei den verschiedenen Rechenautomaten im allgemeinen sehr stark, was die Uebertragung eines Programms von einer Maschine auf eine andere jeweilen zu einem schwierigen Unternehmen macht.

Aus dieser Situation heraus versuchte man nun, eine algorithmische Schreibweise oder Sprache zu definieren, welche folgende Punkte erfüllen soll:

a) sie soll leicht zu lesen sein;
b) sie soll international angenommen werden;
c) sie soll sich gut für wissenschaftliche Berechnungen eignen;
d) sie soll gut verwendbar sein, um Rechenprozesse im Detail zu beschreiben.

Für die klassische mathematische Schreibweise treffen wohl die ersten beiden Punkte zu, die letzten beiden hingegen nicht. Für spezifische Maschinensprachen dagegen ist gerade das umgekehrte der Fall. So entstand als Mittelding zwischen den beiden Extrema die internationale Formelsprache ALGOL.

Wie jede andere Sprache besteht auch die Formelsprache ALGOL aus einzelnen Sätzen bzw. Anweisungen, welche natürlich einer bestimmten Grammatik oder Syntax zu gehorchen haben. Diese sind im Artikel « Report on the Algorithmic Language ALGOL 60 » z.B. in der Zeitschrift *Numerische Mathematik* 2 (1960), 106-137, festgehalten.

Anhand von einigen fundamentalen Elementen soll nun eine kleine Idee von der ALGOL-Sprache vermittelt werden. Ein ALGOL-Programm, welches eine numerische Methode beschreibt, setzt sich unter anderem aus Anweisungen von der folgenden Art zusammen:

$$x := 2 \times p \times q; \qquad y := p \times p - q \times q;$$

welche besagen, dass die Variabeln x und y auf der linken Seite des Ergibt-Zeichens $:=$ die Werte erhalten sollen, welche sich nach der Auswertung der arithmetischen Ausdrücke auf der rechten Seite ergeben. Diese Art von Anweisungen ersetzen somit die in der gewöhnlichen mathematischen Schreibweise geläufigen Bestimmungsformeln für Zwischen- und Endresultate.

Mit Hilfe dieser Sorte von Anweisungen lässt sich natürlich ein Rechenprozess nur in den allereinfachsten Fällen beschreiben, dann nämlich, wenn ein Satz von Formeln lediglich in einer bestimmten Reihenfolge genau einmal angewendet werden soll. Oft wird es aber nötig sein, bestimmte Anweisungen mehrmals für vorgeschriebene Werte einer Laufvariabeln zu wiederholen. Zu diesem Zweck gibt es in ALGOL die sogenannten Schleifenanweisungen. Ich gebe dazu ein Beispiel:

$h := 0;$
for $k := 1$ **step** 1 **until** n **do** $h := h + a[k] \times b[k];$

Hier wird zunächst die Variable h Null gesetzt. Sodann soll für den Schleifenindex k, beginnend mit dem Wert 1 und dann in Schritten von 1 bis und mit dem Wert n die nachfolgende Anweisung ausge-

führt werden. Darin kommen die einfach indizierten Variabeln a und b vor, welche je Vektoren darstellen. Die Schleifenanweisung besagt, dass zum Wert h das Produkt der k-ten Komponente der Vektoren a und b addiert werde. Der Endwert von h wird damit offenbar gleich dem skalaren Produkt der Vektoren a und b.

Zur Beschreibung der Schleifenanweisung werden einige fett gedruckte Worte verwendet, deren Bedeutung ohne weiteres ersichtlich ist. Diese sind Grundelemente der Formelsprache wie etwa die arithmetischen Operationszeichen und haben wie jene eine ganz bestimmte Bedeutung.

In numerischen Berechnungen kommt man oft in die Situation, dass man bestimmte Formeln und Anweisungen nur dann auszuführen hat, falls eine Bedingung erfüllt ist. Man denke nur an den Fall, wo eine Iteration abgebrochen werden soll, sobald die Resultate eine vorgeschriebene Genauigkeit erreicht haben. Dazu gibt es in ALGOL die bedingten Anweisungen. Ein einfaches Beispiel möge das erläutern:

$$\textbf{if } z \geqq 0 \textbf{ then } z := 0;$$

Das Beispiel hat den Effekt, dass die Anweisung $z := 0$ dann und nur dann ausgeführt wird, falls der Wert von z grösser oder gleich Null ist, andernfalls wird sie übersprungen. Somit bleibt der Wert von z ungeändert, falls er negativ ist, andernfalls wird er durch Null ersetzt. Die bedingte Anweisung ist also gleichbedeutend mit der Aussage $z :=$ Minimum $(0, z)$.

In diesem Zusammenhang möchte ich erwähnen, dass neben der gewöhnlichen Arithmetik auch die Bool'sche Algebra in ALGOL aufgenommen ist, was wiederum viele Möglichkeiten eröffnet.

In den bisherigen Beispielen war jeweilen nur eine einzige Anweisung von einer Bedingung respektive von einer Schleifenanweisung abhängig. Doch muss auch die Möglichkeit bestehen, eine Gruppe von mehreren Anweisungen zusammenzufassen, um sie gleichzeitig z.B. von einer Bedingung abhängig zu machen. Dies geschieht mit den sogenannten Anweisungsklammern **begin** und **end**, welche ähnlich wie öffnende resp. schliessende Klammern in arithmetischen Ausdrücken wirken. Sollen z.B. in einem numerischen Verfahren sowohl das innere Produkt von zwei Vektoren a und b wie auch ihre Normen berechnet werden, so kann dies mit folgendem Programmstück geschehen:

```
u := v := w := 0;
for k := 1 step 1 until n do
begin u := u + a[k]↑2;
      v := v + a[k]×b[k];
      w := w + b[k]↑2;
end ;
```

Nun will ich noch auf zwei wichtige Elemente hinweisen. Es kann nämlich jede Anweisung mit einer Marke in Form einer ganzen Zahl oder eines Namens versehen werden, wobei die Marke von der Anweisung durch einen Doppelpunkt getrennt wird. Also z.B.

$$\text{alpha:} \quad x := p \; ; \quad y := q \; ; \quad \text{u.s.f.}$$

Eine solche Markierung ist dann notwendig, falls im Verlauf der Rechnung mit einer bestimmten Anweisung fortgefahren werden soll. Dazu dient die Sprunganweisung. Soll also an einer Stelle mit der Anweisung markiert mit alpha forgefahren werden, dann heisst es im Formelprogramm

go to alpha ;

Mit diesen paar Elementen von ALGOL ist es schon möglich, recht komplizierte numerische Verfahren zu beschreiben. Daneben gibt es noch weitere Arten von Anweisungen und dazu vor allem noch die Deklarationen oder Erklärungen, welche über die auftretenden Variabeln Aussagen machen und damit ein Formelprogramm erst vervollständigen.

Wie anhand von einigen einfachen Elementen darzulegen versucht wurde, ist ALGOL sehr leicht verständlich und daher auch rasch zu erlernen. So dient die internationale Formelsprache dazu, numerische Rechenprozesse in einer einheitlichen Form darzustellen. Damit ist ALGOL ein wichtiges und notwendiges Mittel geworden, um dem Erfahrungsaustausch zwischen den verschiedenen Forschungszentren zu dienen, und davon wird schon reger Gebrauch gemacht.

Um nun ein solches ALGOL-Programm auf einer Maschine durchzurechnen, wäre es an und für sich nötig, dass sich jemand hinsetzt und ein zugehöriges Maschinenprogramm erstellt. Diese Arbeit ist jedoch im allgemeinen langweilig und zudem entstehen dabei wieder Fehler. Deshalb ist man dazu übergegangen auch diese Arbeit der Maschine zu übertragen, wozu natürlich ein Uebersetzungsprogramm nötig ist. So wurden an mehreren Instituten Europas und Amerikas wie auch an der ETH solche Uebersetzer erstellt, so dass nun diese Institute in der Lage sind, sich gegenseitig praktisch rechenbereite Programme auszutauschen, obwohl die verwendeten elektronischen Rechenmaschinen ganz verschieden sind. Dies ist immerhin ein weiterer recht schöner Aspekt für die Formelsprache und es ist zu hoffen, dass sich bald einmal die angewandten Mathematiker zum Wohle ihrer Wissenschaft und Tätigkeit auf internationaler Ebene mit Hilfe von ALGOL verständigen werden.

BEISPIELE ZUR INTERNATIONALEN FORMELSPRACHE ALGOL

1. *Berechnung von ln(x) mit Hilfe des arithmetisch-geometrischen Mittels.*

```
0: p : =(x↑2 + 1) / (2×x) ;  q := (x↑2 — 1) / (2×x);
1: for k := 1 step 1 until 20 do
2: begin p := sqrt (0.5×(1+p)) ;  q := q/p ;
3:       if (abs(p — 1) <10 — 5) then  go to 6 ;
4: end k ;
5: go to nonconvergence ;
6: lnx := 3×q / (2 + p) ;
```

2. *Berechnung des Wertes f und der Ableitung f1 eines Polynoms vom Grad n:* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c[k]x^k$ *nach Horner.*

```
0: f := f1 := 0 ;
1: for k := n step —1 until 0 do
2: begin  f1 := f1×x + f ;  f := f×x + c[k]  end ;
```

3. *Matrizenprodukt zweier quadratischer Matrizen A und B.* $C := A \times B$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times b_{jk}$$

$$\text{für} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

```
0: for i := 1 step 1 until n do
1:     for k := 1 step 1 until n do
2:     begin  c[i, k] := 0 ;
3:         for j := 1 step 1 until n do
4:             c[i, k] := c[i, k] + a[i, j] × b[j, k] ;
       end k .
```

9. Sophie PICCARD (Neuchâtel). — *Un problème de la théorie des ensembles. — Sur la décomposition en constituantes des ensembles analytiques (de Suslin) et des complémentaires analytiques.*

Soit E un ensemble linéaire, analytique au sens de Lebesgue et Lusin, appelé aussi ensemble de Suslin [1]. Supposons le plan euclidien

[1] Rappelons que E est l'ensemble des valeurs d'une fonction multivalente réelle d'une variable réelle $f(t)$ définie pour $0 \leqq t \leqq 1$ et discontinue en une infinité dénombrable de points.

Voir, par exemple, N. LUSIN: *Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1930.

rapporté à un système d'axes rectangulaires Oxy et soit Ox le support de E. Désignons par $\mathscr{E}$ le complémentaire de E par rapport à Ox, appelé complémentaire analytique.

Il existe, comme on sait, d'une part un ensemble plan C, formé d'une infinité dénombrable de segments rectilignes parallèles à Ox et tels que l'ensemble E est criblé par C. Cela veut dire que la perpendiculaire en tout point (x, o) à Ox coupe C en un ensemble de point P_x qui n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points si $(x, o) \in E$, alors que P_x est bien ordonné suivant le même critère, si $(x, o) \in \mathscr{E}$. L'ensemble C est dit un crible élémentaire de l'ensemble E.

D'autre part, on sait qu'il existe un ensemble dénombrable D de segments de Ox qui forme un système déterminant dont l'ensemble E est le noyau. Soient $s_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k, n_1, n_2, \ldots = 1, 2, \ldots)$ les segments de D. Le noyau $N(D)$ de D est par définition l'ensemble

$$N(D) = \bigcup_{n_1, n_2, \ldots} s_{n_1} \cap s_{n_1 n_2} \cap \ldots \text{[1]}.$$

Pour un même ensemble analytique qui n'est pas mesurable B, il existe une infinité indénombrable de cribles plans qui le criblent et il existe également une infinité indénombrable de systèmes déterminants distincts dont il est le noyau.

On sait que tout crible plan C décompose aussi bien $\mathscr{E}$ que E en constituantes mesurables B, disjointes deux à deux, et qu'une infinité indénombrable de ces constituantes sont non vides si E n'est pas mesurable B. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$ la constituante $\mathscr{E}_\alpha$ de rang α de $\mathscr{E}$ définie à partir d'un crible C est l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ auxquels correspond un ensemble P_x bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points, du type d'ordre α, alors que la constituante E_α de rang α de E est formée de tous les points de E auxquels correspond un ensemble P_x qui est la réunion de deux sous-ensembles disjoints P_x^1 et P_x^2, dont le premier est bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points, du type d'ordre α, alors que le second n'est pas bien ordonné suivant le même critère, ne possède pas d'élément dont l'ordonnée soit minimum et que l'ordonnée de tout point de P_x^2 est supérieure à celle de tout point de P_x^1. On sait aussi que $\mathscr{E}$ et E peuvent être décomposés en constituantes à partir de tout système déterminant D dont E est le noyau, comme l'a montré M. W. Sierpinski [2]. On pose, pour tout système de nombres naturels $k, n_1, \ldots, n_k$, $\overset{0}{s}_{n_1 \ldots n_k} = s_{n_1 \ldots n_k}$, $D^0 = D$. Soit, à présent α un nombre ordinal quelconque $< \Omega$ et supposons

[1] Voir W. Sierpinski: Sur une propriété des ensembles (A), *Fundamenta Mathematicae*, t. VIII, 1926, pp. 362-369.

[2]) W. Sierpinski: Sur les constituantes des ensembles analytiques, *Fundamenta Mathematicae*, t. XXI, 1933, pp. 29-34.

que nous ayons déjà défini le système déterminant D^ξ, dérivé d'ordre ξ, de D, formé des ensembles $s^\xi_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$. Si α est de première espèce: $\alpha = \alpha'' + 1$, posons

$$s^\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k} = s^{\alpha *}_{n_1 n_2 \ldots n_k} - s^{\alpha *}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} s^{\alpha *}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$$

Si α est de seconde espèce, posons

$$s^\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcap_{\xi<\alpha} s^\xi_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

et soit, dans les deux cas, D^α le système déterminant formé des ensembles (mesurables B) $s^\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, où k, n_1, $n_2 \ldots$, $n_k = 1, 2, \ldots$ D^α est le système déterminant de E, dérivé d'ordre α, de D.

Pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, posons

$$S^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} s^\alpha_n, \quad T^\alpha = \bigcup_{n_1,n_2,\ldots,n_k} (s^\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k} - s^{\alpha+1}_{n_1 n_2 \ldots n_k}).$$

On a, comme l'a démontré M. Sierpinski, $E = \bigcap_{\alpha<\Omega} S^\alpha = \bigcup_{\alpha<\Omega} (S^\alpha - T^\alpha)$ et les ensembles $\mathscr{E}$ et E sont décomposés, à partir du système déterminant D et de ses dérivés successifs en constituantes mesurables B disjointes deux à deux comme suit: $\mathscr{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathscr{E}^D_\alpha$, $E \bigcup_{\alpha<\Omega} E^D_\alpha$ où

1) $\mathscr{E}^D_0 = CS^0$ (c'est le complémentaire de S^0 par rapport à la droite-support de E).
2) $\mathscr{E}^D_\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} S^\xi - S^\alpha$, quel que soit le nombre ordinal α $(1 \leq \alpha < \Omega)$.
3) $E^D_\alpha = (S^\alpha - T^\alpha) - \bigcup_{\xi<\alpha} E^D_\xi$, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

La décomposition en constituantes d'un ensemble analytique et de son complémentaire n'est pas unique, elle varie d'un crible à l'autre et d'un système déterminant à l'autre et les décompositions en constituantes de tels ensembles faites à partir d'un crible et à partir d'un système déterminant donné sont, en général, distinctes.

Proposition 1. — A tout crible plan C élémentaire on peut faire correspondre un système déterminant D dont le noyau coïncide avec l'ensemble analytique linéaire criblé au moyen de C et tel que E aussi bien que le complémentaire analytique $\mathscr{E}$ de E par rapport à la droite-support de E sont décomposés en les mêmes constituantes par le crible C et par le système déterminant D.

Démonstration. — Soit C le crible élémentaire du plan référé à un système d'axes rectangulaires Oxy dont l'axe Ox est le support

de l'ensemble analytique E criblé par C. Par définition, C est la réunion d'une infinité dénombrable de segments parallèles à Ox. Formons, avec tous ces segments, pris dans un ordre quelconque, une suite simple $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ en faisant correspondre un nombre naturel unique à chacun de ces segments. Soit n_1 un nombre naturel quelconque $\geqq 1$.

Partons du segment σ_{n_1}, soit d_{n_1} la droite parallèle à Ox qui en est le support, soit $y = y_{n_1}$ l'équation de cette droite et soit C_{n_1} la partie du crible C formée de tous les points de C d'ordonnée inférieure à y_{n_1}. L'ensemble C_{n_1} se compose d'un ensemble fini ou dénombrable de segments de C. Si le nombre de ces segments est fini, égal à m, prenons-les dans un ordre quelconque et affectons-les de doubles indices, dont le premier invariable est n_1, et le second varie de 1 à m et désignons par $\sigma_{n_1 1}, \sigma_{n_1 2}, \ldots, \sigma_{n_1 m}$ ces m segments. Posons ensuite $\sigma_{n_1 t} = \varnothing$ quel que soit l'entier $t \geqq m + 1$.

Et si l'ensemble C_{n_1} est formé d'une infinité de segments, comme leur ensemble est dénombrable, on peut en former une suite simple, en les prenant dans un ordre quelconque. Désignons les termes successifs de cette suite par les symboles $\sigma_{n_1 1}, \sigma_{n_1 2}, \ldots$.

Procédons ainsi pour toute valeur de l'entier $n_1 = 1, 2, \ldots$.

Soit, à présent, k un nombre entier quelconque et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ pour tout système de k nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, certains de ces ensembles pouvant être vides et tous les autres étant des segments du crible C. Considérons un système fini quelconque $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de nombres naturels. Si $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \varnothing$, posons $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}} = \varnothing$, quel que soit $n_{k+1} = 1, 2, \ldots$. Et, si $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k} \neq \varnothing$, soit $d_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ la droite parallèle à Ox qui est le support de ce segment et soit $y = y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ l'équation de cette droite. Soit $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ l'ensemble des points du crible C d'ordonnée inférieure à $y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Si cet ensemble n'est pas vide, il est la réunion d'un ensemble dénombrable de segments de C, segments dont on peut former une suite simple et que l'on peut désigner par $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k 1}, \sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k 2}, \ldots$. Si la suite en question ne comprend qu'un nombre fini $m \geqq 0$ de segments de C, nous poserons $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}} = \varnothing$, quel que soit $n_{k+1} = m+1, m+2, \ldots$. Cela étant quel que soit le nombre entier $k > 1$ et, pour un k donné, quel que soit le système de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, on fait ainsi correspondre à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un segment déterminé du crible C ou un ensemble vide. Cette correspondance n'est pas biunivoque.

Quel que soit le système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ appelons $s_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ la projection orthogonale sur Ox $(\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$, de l'ensemble $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ et soit $D = [s_{n_1 n_2 \ldots n_k}]$ le système déterminant formé des ensembles $s_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Montrons que ce système déterminant D satisfait à la proposition 1.

Montrons d'abord que le noyau $N(D)$ de ce système est l'ensemble E. Soit x un élément quelconque de $N(D)$. Il existe donc une suite dénombrable de nombres naturels n_1, n_2, ..., telle que $x \in s_{n_1} \cap s_{n_1 n_2} \cap \ldots$

De la définition du système déterminant D il résulte qu'il existe une suite dénombrable de segments du crible C: σ_{n_1}, $\sigma_{n_1 n_2 \ldots}$, ..., tels que $s_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$ quel que soit $k = 1, 2, \ldots$ et que, $y = y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ étant l'équation de la droite support du segment $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, on a $y_{n_1} > y_{n_1 n_2} > \ldots$. Donc $x \in E$. Cela étant quel que soit l'élément x de $N(D)$, on a l'inclusion $N(D) \subset E$.

Soit à présent x un point quelconque de E. Alors la perpendiculaire en ce point à Ox coupe C en un ensemble de points P_x qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points et il existe au moins une suite dénombrable de segments du crible C, à ordonnées décroissantes et dont chacun a un point commun avec P_x. Il existe donc, d'après ce qui précède, une suite de nombres naturels n_1, n_2, ..., telle que la dite suite de segments se confond avec σ_{n_1}, $\sigma_{n_1 n_2}$, ...

Et comme $s_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$ quel que soit $k = 1, 2, \ldots$, on a $x \in s_{n_1} \cap s_{n_1 n_2} \cap \ldots$ et, par conséquent $x \in N(D)$. Cela étant quel que soit $x \in E$ on a aussi l'inclusion $E \subset N(D)$ et, par suite, $E = N(D)$.

Montrons maintenant que les ensembles $\mathscr{E}$ et E sont décomposés par le crible C et le système déterminant D en les mêmes constituantes. Pour faciliter la décomposition de $\mathscr{E}$ et E en constituantes à partir du crible C, considérons, pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, le crible C dérivé d'ordre α de C [1].

Quel que soit le système fini de nombres naturels n_1, n_2, ..., n_k, considérons l'ensemble $\sigma_{n_1 n_1 \ldots n_k}$ que nous avons défini plus haut et qui est soit un segment du crible C soit un ensemble vide. Posons $\overset{0}{\sigma}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ et soit C^0 le crible plan, réunion des ensembles $\overset{0}{\sigma}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. On a $C^0 = C$. Soit, à présent, α un nombre ordinal quelconque > 0 et $< \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini, pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$, les ensembles $\sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, k, n_1, n_2, $\ldots = 1, 2, \ldots$, ainsi que le crible C^{ξ} dérivé d'ordre ξ de C et qui est la réunion de tous ces ensembles. Si α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$ et si $\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \varnothing$, posons $\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \varnothing$. Et si $\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \neq \varnothing$, soit d la parallèle à Ox support du segment $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ du crible C, soit $(\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}})_d$ la projection orthogonale sur d de l'ensemble $\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$, quel que soit $n_{k+1} = 1, 2, \ldots$; posons

$$\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} (\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}})_d$$

[1] La notion de crible dérivé a été introduite par N. Lusin.

Et, si α est de seconde espèce, posons

$$\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcap_{\xi<\alpha} \sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k} .$$

Dans les deux cas, le crible C, dérivé d'ordre α de C, est la réunion des ensembles $\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, où $k, n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots$.

Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, appelons C^{α}_x la projection orthogonale sur Ox du crible C^{α} et soit $(\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \cdots n_k})_x$ la projection orthogonale sur Ox de l'ensemble $\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$ et quel que soit le système fini de nombres naturels $n_1, n_2 \ldots, n_k$.

Il résulte sans peine de la définition des constituantes d'un ensemble analytique et d'un complémentaire analytique ainsi que de la définition des cribles dérivés que

1') $\mathscr{E}_0 = C\, C_0$ ($\mathscr{E}_0$ est le complémentaire de C^0_x par rapport à Ox);

2') $\mathscr{E}_\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} C^{\xi}_x - C^{\alpha}_x$ quel que soit le nombre ordinal $\alpha \geqq 1$ et $< \Omega$;

3') $E_\alpha = C^{\alpha}_x - \bigcup_{n_1, n_2, \ldots, n_k} ((\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x - (\sigma^{\alpha+1}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x) - \bigcup_{\xi<\alpha} E_\xi$, quel que soit α $(0 \leqq \alpha < \Omega)$.

Il s'agit de décomposition en constituantes de $\mathscr{E}$ et E à partir du crible C, alors que les formules 1) 2) et 3)définissent les constituantes de ces deux ensembles à partir du système déterminant D.

Comme $C^{\alpha}_x \supset C^{\beta}_x$ pour tout couple de nombres ordinaux α et β, tels que $\alpha < \beta < \Omega$, si α est un nombre ordinal de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, on a $\bigcap_{\xi<\alpha} C^{\xi}_x = C^{\alpha^*}_x$ et, par suite $\mathscr{E}_\alpha = C^{\alpha^*}_x - C^{\alpha}_x$.

On a les formules

I) $s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$ quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$ et quel que soit le nombre fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$; et

II) $S^{\alpha} = \bigcup_{n=1}^{\infty} s^{\alpha}_n = \bigcup_{n_1 n_2 \ldots n_k} s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = C^{\alpha}_x$, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

Démontrons d'abord la formule I). On a, par définition, $s_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$. Soit à présent α un nombre ordinal > 0 et $< \Omega$ quelconque et supposons que nous ayons déjà prouvé que, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \alpha$, on a $s^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$. Démontrons que $s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$.

Si α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, on a, par définition,

$$s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = s^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} s^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}} ,$$

$$\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} (\sigma^{\alpha^*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}})_d$$

donc aussi

$$(\sigma^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x = (\sigma^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x \cap \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} (\sigma^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}})_x \,.$$

La propriété à démontrer étant supposée vraie pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$, on a

$$(\sigma^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x = s^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

et

$$(\sigma^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}})_x = s^{\alpha*}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$$

quel que soit $n_{k+1} = 1, 2, \ldots$ d'où il résulte que

$$s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x \,.$$

Et, si α est de seconde espèce, on a par définition

$$s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcap_{\xi < \alpha} s^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

et

$$\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \bigcap_{\xi < \alpha} \sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,.$$

Donc aussi

$$(\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x = \bigcap_{\xi < \alpha} (\sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x \,.$$

Et comme la propriété à démontrer est supposée vraie pour tout $\xi < \alpha$, on a $s^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\xi}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$ quel que soit $\xi < \alpha$, donc aussi $s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (\sigma^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k})_x$, c.q.f.d.

Etablissons maintenant la formule II).

Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$ et les nombres naturels $k, n_1, \ldots n_k$, on a l'inclusion

$$*) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} s^{\alpha}_n \subset \bigcup_{n_1 n_2 \ldots n_k} s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

puisque tous les s^{α}_n figurent parmi les $s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. D'autre part, de la définition du système D il résulte qu'à tout système fini de nombre naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tels que $s_{n_1 n_2 \ldots n_k} \neq \varnothing$, correspond un nombre naturel n, tel que $s_{n_1 n_2 \ldots n_k} = s_n$. Mais alors $s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = s^{\alpha}_n$ quel que soit $\alpha < \Omega$ d'après les définitions précédentes. On en déduit l'inclusion

$$**) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} s_n \supset \bigcup_{n_1, n_2, \ldots, n_k} s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

et des deux inclusions*) et**) découle l'égalité

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} s^{\alpha}_n = \bigcup_{n_1, n_2, \ldots, n_k} s^{\alpha}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,.$$

On en déduit immédiatement, d'après I) que $S^\alpha = C_x^\alpha$ quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$. La formule II) est donc établie.

Or les relations I) et II) ainsi que les formules 1), 2), 3), 1′), 2′) et 3′) définissent les constituantes des ensembles $\mathscr{E}$ et E entraînent l'identité des décompositions en ces constituantes de chacun des ensembles $\mathscr{E}$ et E au moyen du crible C et du système déterminant D.

La proposition 1 est donc démontré [1].

Proposition 2. — Tout ensemble analytique E peut être décomposé, en même temps que son complémentaire $\mathscr{E}$, en constituantes mesurables B disjointes deux à deux de telle façon que toutes les constituantes dont le rang est un nombre ordinal de seconde espèce soient vides.

Démonstration. — Voici la démonstration de la proposition 2 dans le cas où l'ensemble analytique E est linéaire et $\mathscr{E}$ est son complémentaire par rapport à la droite support de E. Comme l'a prouvé M. W. Sierpinski [2] E peut être criblé au moyen d'un crible plan fermé C, tel que l'ordonnée de tout point de C est comprise entre 0 et 1. Prenons un tel crible fermé C et décomposons E et $\mathscr{E}$ en constituantes au moyen de ce crible. Soient $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$ et $\mathscr{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathscr{E}_\alpha$ ces décompositions.

Supposons le plan du crible référé à un système d'axes rectangulaires Oxy dont l'arc Ox est le support des deux ensembles E et $\mathscr{E}$. Soit, pour tout nombre réel a, P_a l'intersection de la droite $x = a$ avec C. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha > \Omega$, la constituante $\mathscr{E}_\alpha$ de $\mathscr{E}$ est, par définition, l'ensemble des points $(a, 0)$ de $\mathscr{E}$ en lesquels l'ensemble P_a est bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points, et a pour type d'ordre α. Or P_a, en tant qu'intersection de deux ensembles fermés, est un ensemble fermé. Si son type d'ordre α était un nombre ordinal de seconde espèce, P_a serait infini et il n'existerait pas dans P_a de point d'ordonnée maximum. Mais P_a étant borné (il fait partie du segment d'origine $(a, 0)$ et d'extrémité $(a, 1)$), infini, bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points, il existe nécessairement un point (a, y) de la droite $x = a$ dont l'ordonnée est supérieure à celles de tous les points de P_a, qui ne fait pas partie de cet ensemble puisque l'ensemble bien ordonné P_a n'a pas de dernier élément, mais qui est un point d'accumulation de P_a. Donc P_a n'est pas fermé, ce qui est contradictoire. Il s'ensuit que toute constituante, $\mathscr{E}_a$ de $\mathscr{E}$, où α est un nombre ordinal de seconde espèce, est vide.

---

[1] La proposition 1 est encore vraie et la démonstration précédente subsiste si le crible plan C est formé d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B linéaires quelconques dont les supports sont des droites parallèles à Ox.

[2] W. Sierpinski: Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés, *Fundamenta Mathematicae*, t. XVII, 1931, pp. 77-91.

Soit encore α un nombre ordinal de seconde espèce, $> \Omega$, quelconque. Envisageons la constituante E_α de E. Par définition, c'est l'ensemble des points $(a, 0)$ de E, tels que $P_a = P_a^1 \cup P_a^2$, où $P_a^1 \cap P_a^2 = \varnothing$, P_a^1 est bien ordonné, du type d'ordre α, suivant la grandeur des ordonnées de ses points, P_a^2 n'est pas bien ordonné suivant le même critère, *ne possède pas de point d'ordonnée minimum* et que l'ordonnée de chacun de ses points est supérieure à celle de chaque point de P_a^1. Puisque P_a^2 n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points, cet ensemble est nécessairement infini. Si le point $(a, 0)$ fait partie de E, comme α est de seconde espèce, l'ensemble P_a^1 est infini. Et comme il est bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points et borné, il doit exister un point (a, y) de la droite $x = a$ dont l'ordonnée y est supérieure à celle de tout point de P_a^1 et qui est un point d'accumulation de ce dernier ensemble, alors que P_a^1 est l'intersection de l'ensemble P_a avec la demi-droite $x = a$ issue du point (a, y) et dirigée dans le sens des y négatifs. Donc le point (a, y) ne fait pas partie de l'ensemble P_a^2 et, par suite, P_a n'est pas fermé, ce qui est contradictoire. Par conséquent $E_\alpha = \varnothing$.

Cela étant quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$ de seconde espèce, la proposition 2 est démontrée.