

# 1. Die Gruppen $\Pi_n(A,B)$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

werden. Die angedeuteten allgemeinen Resultate, die neues Licht auf die Beziehungen zwischen Homologie und Homotopie werfen, haben vor allem die Gestalt exakter Folgen und damit verknüpfter Isomorphismen, welche alle die  $\Pi(A, B)$  oder von ihnen abgeleitete Gruppen betreffen, und von diesen ist im folgenden die Rede. Sie sind in Zusammenarbeit mit P. J. Hilton entwickelt worden und grösstenteils an anderer Stelle ausführlich dargestellt [1, 2, 4].

### 1. DIE GRUPPEN $\Pi_n(A, B)$ .

Die Menge  $\Pi(A, B)$  besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich  $A$  — d.h. bei festem  $B$  als Funktor von  $A$  — falls  $B$  ein gruppenähnlicher Raum ist (d.h. ein Raum mit einer Multiplikation  $m: B \times B \rightarrow B$ , welche bis auf Homotopie die Gruppenaxiome erfüllt), und nur in diesem Falle. Sie besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich  $B$  bei festem  $A$ , wenn  $A$  mit einer Comultiplikation versehen ist, d.h. mit einer Abbildung  $m': A \rightarrow A \vee A$  mit den dualen Axiomen (vgl. [1]). Dies ist insbesondere der Fall für  $B = \Omega Y$ , den Schleifenraum von  $Y$ , oder für  $A = \Sigma X$ , die Suspension von  $X$ . Zwischen  $\Pi(\Sigma X, Y)$  und  $\Pi(X, \Omega Y)$  besteht eine natürliche, d.h. mit allen Abbildungen verträgliche Isomorphie, und man kann diese Gruppen ohne Schaden identifizieren; durch Iteration erhält man die Gruppen

$$\Pi_n(A, B) = \Pi(\Sigma^n A, B) = \Pi(\Sigma^{n-k} A, \Omega^k B), \quad 0 \leq k \leq n$$

für  $n = 1, 2, 3, \dots$ , wobei es für  $1 \leq k \leq n-1$  gleichgültig ist, welche der gruppenbildenden Strukturen man verwendet. Sie sind covariante Funktoren von  $B$ , contravariante von  $A$ ; für  $n \geq 2$  sind sie stets Abelsche Gruppen [1]. Wählt man für  $A$  die Sphäre  $S_{m-n}$ , so ist  $\Pi_n(A, B) = \pi_m(B)$  die  $m$ -te Hurewicz'sche Homotopiegruppe; wählt man für  $B$  den Eilenberg-MacLane-Raum  $K(G, m+n)$ , wo  $G$  eine Abelsche Gruppe ist, so ist  $\Pi_n(A, B) = H^m(A; G)$  eine homotopisch definierte Cohomologiegruppe, die für Polyeder  $A$  mit der üblichen (etwa der singulären) übereinstimmt, wie man z.B. von der Erweiterungstheorie der Abbildungen her weiss.

Eine Abbildung  $\beta : B \rightarrow B'$  induziert Homomorphismen  $\beta_* : \Pi_n(A, B) \rightarrow \Pi_n(A, B')$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; diese lassen sich verknüpfen durch „relative“ Gruppen  $P_n(A, B)$  und eine *exakte* Sequenz (Definition der  $P_n$  sowie von  $J$  und  $\partial$  vgl. [1, 3])

$$\dots \rightarrow \Pi_n(A, B) \xrightarrow{\beta_*} \Pi_n(A, B') \xrightarrow{J} P_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots;$$

wir fassen diese in evidentester Weise in ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Pi_*(A, B) & \xrightarrow{\beta_*} & \Pi_*(A, B') \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \beta) & \end{array}$$

zusammen, wobei  $\Pi_*$  bzw.  $P_*$  die direkte Summe der  $\Pi_n$  bzw.  $P_n$  ist und  $\beta_*$  und  $J$  als Homomorphismen vom Grade 0,  $\partial$  vom Grade  $-1$  aufzufassen sind. Für die relative Gruppe  $P_*(A, \beta)$ , die zum Testraum  $A$  und zur Abbildung  $\beta$  gehört, gilt die *Exzisionseigenschaft* für Faserungen, wie sie im Spezialfall der  $\pi_n$  wohlbekannt ist: Ist  $\beta$  eine Faserabbildung (im Sinne des „covering homotopy theorem“) mit Faser  $B_0$ , so hängt  $P_*(A, \beta)$  nur von  $B_0$  ab; das exakte Dreieck ergibt dann einen natürlichen Isomorphismus vom Grade  $-1$

$$P_*(A, \beta) \cong \Pi_*(A, B_0).$$

Die duale Betrachtung — fester Raum  $B$  und Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  — ergibt analog relative Gruppen  $P_n(\alpha, B)$  und ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Pi_*(A', B) & \xrightarrow{\alpha_*} & \Pi_*(A, B) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(\alpha, B) & \end{array}$$

sowie einen Exzisionsisomorphismus vom Grade  $-1$  für Cofaserungen  $\alpha$  (d.h. Abbildungen  $\alpha : A \rightarrow A'$  mit „homotopy extension property“,  $A'/\alpha(A) = A_0$  heisst dann die Cofaser von  $\alpha$ )

$$P_*(\alpha, B) \cong \Pi_*(A_0, B).$$

Die Gruppen  $\Pi_*(A, B)$  besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem  $A$

(I) Exaktheit für Abbildungen  $\beta : B \rightarrow B'$  und passende relative Gruppen  $P_*(A, \beta)$ ,

(II) Exzision für Faserungen;

bei festem  $B$

(I') Exaktheit für Abbildungen  $\alpha : A \rightarrow A'$  und passende relative Gruppen  $P_*(\alpha, B)$ ,

(II') Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bzw. (III'), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus  $\beta_*$  bzw.  $\alpha^*$  induzieren. Die Gruppen  $\Pi_*(A, B)$  verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum  $B$*  oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum  $A$* , wobei eine Unterscheidung für die „absoluten“ Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von  $A$  bzw.  $B$  —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume  $B$ , vgl. Abschnitt 3.

## 2. DIE EXAKTE SEQUENZ DER RELATIVEN GRUPPEN.

Sind  $\beta_1$  und  $\beta_2$  Abbildungen,  $\beta_1 : B_1 \rightarrow B'_1$ ,  $\beta_2 : B_2 \rightarrow B'_2$ , so versteht man unter einer Abbildung  $\Phi : \beta_1 \rightarrow \beta_2$  ein Paar von Abbildungen  $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$  und  $\varphi' : B'_1 \rightarrow B'_2$  derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung  $\Phi$  induziert Homomorphismen  $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \rightarrow P_n(A, \beta_2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , die sich wiederum durch passende relative Gruppen „zweiter Stufe“