**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 8 (1962)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS A CONNEXION LINÉAIRE ET DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES
**Autor:** Lichnerowicz, André
**Kapitel:** I. Le groupe de Kostant.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-37948

consacrée à l'étude géométrique d'espaces homogènes particulièrement importants. Les différents résultats présentés sont dus principalement à Kobayashi, Kostant, Nomizu, Wang, Yano et à l'auteur de cette conférence.

## I. Le groupe de Kostant.

2. *Transformations infinitésimales affines.*

*a)* Soit $V_m$ une variété différentiable [1]) de dimension $m$, *munie d'une connexion linéaire.* Cette connexion est définie par sa forme $\omega$, 1-forme sur l'espace fibré principal $E(V_m)$ des repères de $V_m$ et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. A la 2-forme de torsion $\Sigma$ de type vectoriel de la connexion correspond canoniquement une 1-forme $\lambda(\Sigma)$ de type adjointe à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. Désignons par $\bar{\omega}$ la *connexion associée* à $\omega$ définie par [2]):

$$\bar{\omega} = \omega + \lambda(\Sigma)$$

et par $\nabla$ et $\bar{\nabla}$ les opérateurs de différentiation absolue par rapport aux connexions $\omega$ et $\bar{\omega}$. A tout champ de vecteurs $X$, nous faisons correspondre le champ de tenseurs $A_X$ de type (1, 1) défini par la 1-forme de type vectoriel $-\bar{\nabla} X$. En chaque point $x$ de $V_m$, $A_X(x)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $T_x$ tangent en $x$ à $V_m$. Le champ $A_X$ intervient dans l'expression de l'opérateur de transformation infinitésimale $\mathscr{L}(X)$ en termes de dérivée covariante. En particulier, si $t$ est un tenseur de type (1, 1):

$$\mathscr{L}(X)\, t = i(X) \nabla t + [A_X, t] \tag{2-1}$$

où $i(X)$ est l'opérateur de produit intérieur par $X$ sur une forme et où le crochet est entendu au sens du crochet des endomorphismes.

*b)* Un champ de vecteurs $X$ définit une *transformation infinitésimale* (t.i.) *affine* si cette t.i. laisse $\omega$ invariante, c'est-à-dire si

$$\mathscr{L}(X)\, \omega = 0 \tag{2-2}$$

---

[1]) Dans cette conférence, tous les éléments introduits sont supposés indéfiniment différentiables.

[2] Pour une connexion sans torsion, $\bar{\omega}$ coïncide avec $\omega$.

où $\mathscr{L}(X)$ a été étendu à $E(V_m)$; (2-2) peut être traduite par:

$$i(Y)\nabla A_X = \Omega(X, Y) \tag{2-3}$$

où $\Omega$ est la forme de courbure de la connexion et $Y$ un vecteur arbitraire. De (2-3) il résulte que deux t.i. affines pour lesquelles $X$ et $A_X$ ont mêmes valeurs en un point coïncident sur $V_m$. Ainsi les t.i. affines définissent par le crochet usuel $[X, Y] = \mathscr{L}(X)Y$, une algèbre de Lie *de dimension finie.*

*c*) Une *transformation affine* est une transformation $\mu$ de $V_m$ laissant invariante la connexion $\omega$. Si $\mu'$ est l'application linéaire tangente définie par $\mu$ et $\tau(l)$ le *transport* au sens de la connexion le long d'un chemin $l$ de $V_m$ joignant $x$ à $x'$, on a alors l'égalité:

$$\mu' \, o \, \tau(l) = \tau(\mu l) \, o \, \mu' \tag{2-4}$$

entre applications linéaires de $T_x$ sur $T_{\mu x'}$.

On sait que le groupe $A(V_m)$ de toutes les transformations affines de $V_m$ admet une structure naturelle de *groupe de Lie* (Nomizu ou corollaire d'un théorème plus général d'Ehresmann). Nous désignons par $A^0(V_m)$ le plus grand sous-groupe connexe de $A(V_m)$. Si $V_m$ est *complète* pour la connexion $\omega$, toute t.i. affine définit un groupe à un paramètre de transformations affines globales de $V_m$.

## 3. *Interprétation de $A_X$.*

Etant donné un champ de vecteurs $X$, désignons par $x(t) = \exp(tX)\,x_0$ pour $t$ suffisamment petit, la solution de $dx/dt = X(x)$ telle que $x(0) = x_0$. Pour $0 \leqslant t \leqslant u$ ($u$ suffisamment petit), $x(t)$ engendre un chemin $l_u$ issu de $x_0$.

Pour $X$ définissant une t.i. *affine*, $A_X$ admet une interprétation géométrique simple: considérons les automorphismes de $T_{x_0}$ définis, pour $u$ variable, par $\exp(-uX)'\,\tau(l_u)$. Ces automorphismes appartiennent à un groupe à un paramètre d'automorphismes de $T_{x_0}$ et l'on a:

$$\exp[u\,A_X(x_0)] = \exp(-uX)'\,\tau(l_u)\,. \tag{3-1}$$

4. *Le groupe de Kostant.*

*a)* Soit $X$ et $Y$ deux t.i. *affines*. De l'invariance de $\overline{\omega}$ par $Y$ résulte:

$$A_{[Y,X]} = \mathscr{L}(Y)\,A_X$$

De (2-1) et (2-3) il vient:

$$A_{[Y,X]} = i(Y)\nabla A_X + [A_Y, A_X] = \Omega(X, Y) + [A_Y, A_X]\,.$$

On obtient ainsi la relation simple:

$$\Omega(X, Y) = [A_X, A_Y] - A_{[X,Y]}\,; \tag{4-1}$$

*b)* Soit $L$ une algèbre de Lie de t.i. affines de $V_m$. Pour $X \in L$, les endomorphismes $A_X(x)$ de $T_x$ engendrent une algèbre de Lie $\underline{K}_x(L)$ d'endomorphismes qui est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $K_x(L)$ d'automorphismes de $T_x$; $K_x(L)$ sera dit le *groupe de Kostant* en $x$ de l'algèbre $L$ [1]). Il a été un peu généralisé par Wang.

Soit $\underline{\Psi}'_x$ l'algèbre d'*holonomie infinitésimale*: c'est l'algèbre engendrée, en tant qu'espace vectoriel, par les endomorphismes de $T_x$ déduits des dérivées covariantes successives du tenseur de courbure. D'après (2-1), le groupe de Kostant est sous-groupe du normalisateur connexe $N^0(\Psi'_x)$ du groupe d'holonomie infinitésimale dans le groupe de tous les automorphismes de $T_x$.

Supposons l'algèbre $L$ *transitive*: le sous-espace de $T_x$ engendré par les $X(x)$ $(X \in L)$ coïncide avec $T_x$. Dans ce cas $\Psi'_x$ coïncide avec le *groupe d'holonomie connexe* $\Psi^0_x$. De (4-1), il résulte que les éléments de l'algèbre d'holonomie engendrés par le tenseur de courbure lui-même sont dans $\underline{K}_x(L)$ et, par récurrence sur l'ordre des dérivations du tenseur de courbure, on déduit de (2-1) qu'il en est de même pour tous les éléments de l'algèbre d'holonomie. *Ainsi si* L *est transitive:*

$$\Psi^0_x \subset K_x(L) \subset N^0(\Psi^0_x)\,. \tag{4-2}$$

5. *Espace homogène à connexion linéaire invariante.*

Soit $V_m = G/H$ (*G effectif*) un espace homogène *muni d'une connexion linéaire invariante*. Dans ce cas le groupe linéaire d'iso-

1) Ce groupe a été introduit par Kostant [1] dans le cas des variétés riemanniennes et des algèbres d'isométries infinitésimales.

tropie $\tilde{H}$ est isomorphe à $H$. A chaque élément $g$ de $G$ correspond une transformation affine $\mu_g$ de $V_m$. Le groupe $G$ définit sur $V_m$ une algèbre transitive $L$ de t.i. affines; nous désignons par $K_x(G)$ le groupe de Kostant correspondant à L:

$$(5\text{-}1) \qquad \Psi_x^0 \subset K_x(G) \subset N^0(\Psi_x^0) .$$

Si $X \in L$, $\mu_g'$ transforme le tenseur $A_X(x)$ en le tenseur $A_{\mu' g X}(gx)$. Par suite, *chaque élément* g *de* G *établit un isomorphisme de* $K_x$ (G) *sur* $K_{gx}$ (G) (isomorphisme qui applique $\Psi_x^0$ sur $\Psi_{gx}^0$). En particulier

$$(5\text{-}2) \qquad \tilde{H}_x \subset N[K_x(G)] \qquad (\tilde{H}_x^0 \subset K_x(G))$$

où $N$ désigne le normalisateur dans le groupe des automorphismes de $T_x$.

On peut obtenir pour $K_x(G)$ un résultat analogue en ce qui concerne le transport. En considérant, dans chaque classe d'homotopie de lacets en $x$, un lacet composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de $G$ et en évaluant le transport le long de chacun de ces arcs au moyen de la formule (3-1), on établit d'abord, grâce à (3-1),

$$(5\text{-}3) \qquad \Psi_x \subset N[K_x(G)] .$$

On voit de même que le transport le long d'un chemin $l(x, x')$ composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de $G$ établit un isomorphisme entre $K_x(G)$ et $K_{x'}(G)$. Il résulte de (5-3) que *le transport le long d'un chemin arbitraire reliant* x *à* x′ *établit un isomorphisme entre* $K_x$ (G) *et* $K_{x'}$ (G).

Il existe, comme nous le verrons, des cas nombreux où:

$$\Psi_x^0 = K_x(G) .$$

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que sur l'espace homogène $V_m = G/H$, *la connexion linéaire invariante est à holonomie normale.*

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur $t$ est invariant par transport, $t(x)$ est invariant par le groupe d'holonomie $\Psi_x$. De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte:

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène* $V_m = G/H$ (G *effectif*) *à connexion linéaire invariante, si un tenseur* t *satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

a) t *est invariant par l'action de* G;

b) t *est invariant par transport;*

c) t (x) *est invariant par le groupe de Kostant* $K_x(G)$ *en un point* x *de* $V_m$.

Au champ $t$ on peut substituer un champ $Q$ de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est *à holonomie normale*, $b$ entraîne $c$, donc $a$: Tout tenseur invariant par transport est invariant par $G$.

## II. TRANSFORMATIONS AFFINES ET ISOMÉTRIES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit $V_m$ une variété *riemannienne* de tenseur métrique $g$, que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne.* Toute isométrie ou *similitude* ($\mu^* g = c^2 g$; $c =$ const.) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où *le groupe d'holonomie est irréductible, toute transformation affine* reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite *est une similitude.* En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

*a)* La variété $V_m$ est dite réductible si *son groupe d'holonomie connexe* $\Psi_x^0$ *est réductible dans le réel.* S'il en est ainsi, l'espace vectoriel $T_x$ peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux $T_x^a$ ($a = 0, 1, \ldots k$), invariants par $\Psi_x^0$, tels que $\Psi_x^0$ induise l'identité sur $T_x^0$ et des représentations irréductibles sur