I. Le groupe de Kostant.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

consacrée à l'étude géométrique d'espaces homogènes particulièrement importants. Les différents résultats présentés sont dus principalement à Kobayashi, Kostant, Nomizu, Wang, Yano et à l'auteur de cette conférence.

I. Le groupe de Kostant.

2. *Transformations infinitésimales affines.*

a) Soit V_m une variété différentiable [1]) de dimension m, *munie d'une connexion linéaire.* Cette connexion est définie par sa forme ω, 1-forme sur l'espace fibré principal $E(V_m)$ des repères de V_m et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. A la 2-forme de torsion Σ de type vectoriel de la connexion correspond canoniquement une 1-forme $\lambda(\Sigma)$ de type adjointe à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. Désignons par $\overline{\omega}$ la *connexion associée* à ω définie par [2]):

$$\overline{\omega} = \omega + \lambda(\Sigma)$$

et par ∇ et $\overline{\nabla}$ les opérateurs de différentiation absolue par rapport aux connexions ω et $\overline{\omega}$. A tout champ de vecteurs X, nous faisons correspondre le champ de tenseurs A_X de type (1, 1) défini par la 1-forme de type vectoriel $-\overline{\nabla} X$. En chaque point x de V_m, $A_X(x)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_m. Le champ A_X intervient dans l'expression de l'opérateur de transformation infinitésimale $\mathscr{L}(X)$ en termes de dérivée covariante. En particulier, si t est un tenseur de type (1, 1):

$$\mathscr{L}(X)\,t = i(X)\,\nabla t + [A_X, t] \tag{2-1}$$

où $i(X)$ est l'opérateur de produit intérieur par X sur une forme et où le crochet est entendu au sens du crochet des endomorphismes.

b) Un champ de vecteurs X définit une *transformation infinitésimale* (t.i.) *affine* si cette t.i. laisse ω invariante, c'est-à-dire si

$$\mathscr{L}(X)\,\omega = 0 \tag{2-2}$$

---

1) Dans cette conférence, tous les éléments introduits sont supposés indéfiniment différentiables.

2 Pour une connexion sans torsion, $\overline{\omega}$ coïncide avec ω.

où $\mathscr{L}(X)$ a été étendu à $E(V_m)$; (2-2) peut être traduite par:

$$i(Y)\nabla A_X = \Omega(X, Y) \tag{2-3}$$

où Ω est la forme de courbure de la connexion et Y un vecteur arbitraire. De (2-3) il résulte que deux t.i. affines pour lesquelles X et A_X ont mêmes valeurs en un point coïncident sur V_m. Ainsi les t.i. affines définissent par le crochet usuel $[X, Y] = \mathscr{L}(X)Y$, une algèbre de Lie *de dimension finie*.

c) Une *transformation affine* est une transformation μ de V_m laissant invariante la connexion ω. Si μ' est l'application linéaire tangente définie par μ et $\tau(l)$ le *transport* au sens de la connexion le long d'un chemin l de V_m joignant x à x', on a alors l'égalité:

$$\mu' \, o \, \tau(l) = \tau(\mu l) \, o \, \mu' \tag{2-4}$$

entre applications linéaires de T_x sur $T_{\mu x'}$.

On sait que le groupe $A(V_m)$ de toutes les transformations affines de V_m admet une structure naturelle de *groupe de Lie* (Nomizu ou corollaire d'un théorème plus général d'Ehresmann). Nous désignons par $A^0(V_m)$ le plus grand sous-groupe connexe de $A(V_m)$. Si V_m est *complète* pour la connexion ω, toute t.i. affine définit un groupe à un paramètre de transformations affines globales de V_m.

3. *Interprétation de* A_X.

Etant donné un champ de vecteurs X, désignons par $x(t) = \exp(tX)\, x_0$ pour t suffisamment petit, la solution de $dx/dt = X(x)$ telle que $x(0) = x_0$. Pour $0 \leqslant t \leqslant u$ (u suffisamment petit), $x(t)$ engendre un chemin l_u issu de x_0.

Pour X définissant une t.i. *affine*, A_X admet une interprétation géométrique simple: considérons les automorphismes de T_{x_0} définis, pour u variable, par $\exp(-uX)'\,\tau(l_u)$. Ces automorphismes appartiennent à un groupe à un paramètre d'automorphismes de T_{x_0} et l'on a:

$$\exp[u\, A_X(x_0)] = \exp(-uX)'\,\tau(l_u)\,. \tag{3-1}$$

4. *Le groupe de Kostant.*

a) Soit X et Y deux t.i. *affines*. De l'invariance de $\overline{\omega}$ par Y résulte:

$$A_{[Y,X]} = \mathscr{L}(Y)\, A_X$$

De (2-1) et (2-3) il vient:

$$A_{[Y,X]} = i(Y)\nabla A_X + [A_Y, A_X] = \Omega(X, Y) + [A_Y, A_X] .$$

On obtient ainsi la relation simple:

$$\Omega(X, Y) = [A_X, A_Y] - A_{[X,Y]} ; \tag{4-1}$$

b) Soit L une algèbre de Lie de t.i. affines de V_m. Pour $X \in L$, les endomorphismes $A_X(x)$ de T_x engendrent une algèbre de Lie $\underline{K}_x(L)$ d'endomorphismes qui est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $K_x(L)$ d'automorphismes de T_x; $K_x(L)$ sera dit le *groupe de Kostant* en x de l'algèbre L [1]). Il a été un peu généralisé par Wang.

Soit $\underline{\Psi}'_x$ l'algèbre d'*holonomie infinitésimale*: c'est l'algèbre engendrée, en tant qu'espace vectoriel, par les endomorphismes de T_x déduits des dérivées covariantes successives du tenseur de courbure. D'après (2-1), le groupe de Kostant est sous-groupe du normalisateur connexe $N^0(\Psi'_x)$ du groupe d'holonomie infinitésimale dans le groupe de tous les automorphismes de T_x.

Supposons l'algèbre L *transitive*: le sous-espace de T_x engendré par les $X(x)$ $(X \in L)$ coïncide avec T_x. Dans ce cas Ψ'_x coïncide avec le *groupe d'holonomie connexe* Ψ^0_x. De (4-1), il résulte que les éléments de l'algèbre d'holonomie engendrés par le tenseur de courbure lui-même sont dans $\underline{K}_x(L)$ et, par récurrence sur l'ordre des dérivations du tenseur de courbure, on déduit de (2-1) qu'il en est de même pour tous les éléments de l'algèbre d'holonomie. *Ainsi si* L *est transitive:*

$$\Psi^0_x \subset K_x(L) \subset N^0(\Psi^0_x) . \tag{4-2}$$

5. *Espace homogène à connexion linéaire invariante.*

Soit $V_m = G/H$ (*G effectif*) un espace homogène *muni d'une connexion linéaire invariante*. Dans ce cas le groupe linéaire d'iso-

1) Ce groupe a été introduit par Kostant [1] dans le cas des variétés riemanniennes et des algèbres d'isométries infinitésimales.

tropie $\tilde{H}$ est isomorphe à H. A chaque élément g de G correspond une transformation affine μ_g de V_m. Le groupe G définit sur V_m une algèbre transitive L de t.i. affines; nous désignons par $K_x(G)$ le groupe de Kostant correspondant à L:

$$\Psi_x^0 \subset K_x(G) \subset N^0(\Psi_x^0) . \tag{5-1}$$

Si $X \in L$, μ_g' transforme le tenseur $A_X(x)$ en le tenseur $A_{\mu' g X}(gx)$. Par suite, *chaque élément* g *de* G *établit un isomorphisme de* K_x (G) *sur* K_{gx} (G) (isomorphisme qui applique Ψ_x^0 sur Ψ_{gx}^0). En particulier

$$\tilde{H}_x \subset N[K_x(G)] \qquad (\tilde{H}_x^0 \subset K_x(G)) \tag{5-2}$$

où N désigne le normalisateur dans le groupe des automorphismes de T_x.

On peut obtenir pour $K_x(G)$ un résultat analogue en ce qui concerne le transport. En considérant, dans chaque classe d'homotopie de lacets en x, un lacet composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G et en évaluant le transport le long de chacun de ces arcs au moyen de la formule (3-1), on établit d'abord, grâce à (3-1),

$$\Psi_x \subset N[K_x(G)] . \tag{5-3}$$

On voit de même que le transport le long d'un chemin $l(x, x')$ composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G établit un isomorphisme entre $K_x(G)$ et $K_{x'}(G)$. Il résulte de (5-3) que *le transport le long d'un chemin arbitraire reliant* x *à* x' *établit un isomorphisme entre* K_x (G) *et* $K_{x'}$ (G).

Il existe, comme nous le verrons, des cas nombreux où:

$$\Psi_x^0 = K_x(G) .$$

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que sur l'espace homogène $V_m = G/H$, *la connexion linéaire invariante est à holonomie normale.*

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur t est invariant par transport, $t(x)$ est invariant par le groupe d'holonomie Ψ_x. De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte:

Théorème. — *Sur un espace homogène* $V_m = G/H$ (G *effectif*) *à connexion linéaire invariante, si un tenseur* t *satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

a) t *est invariant par l'action de* G*;*

b) t *est invariant par transport;*

c) t (x) *est invariant par le groupe de Kostant* $K_x(G)$ *en un point* x *de* V_m.

Au champ t on peut substituer un champ Q de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est *à holonomie normale*, b entraîne c, donc a: Tout tenseur invariant par transport est invariant par G.

II. Transformations affines et isométries d'une variété riemannienne.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit V_m une variété *riemannienne* de tenseur métrique g, que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne.* Toute isométrie ou *similitude* ($\mu^* g = c^2 g$; $c = \text{const.}$) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où *le groupe d'holonomie est irréductible*, *toute transformation affine* reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite *est une similitude.* En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

a) La variété V_m est dite réductible si *son groupe d'holonomie connexe* Ψ_x^0 *est réductible dans le réel.* S'il en est ainsi, l'espace vectoriel T_x peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux T_x^a ($a = 0, 1, \ldots k$), invariants par Ψ_x^0, tels que Ψ_x^0 induise l'identité sur T_x^0 et des représentations irréductibles sur