7. Approximations diophantiennes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

La loi de réciprocité quadratique de Gauss lie ces 2 points de vue.

Mais les diviseurs p de x^2-q sont les mêmes que ceux de x^2-qy^2 (si ces diviseurs p sont sans facteurs carrés et premiers à q); cette dernière expression est un cas particulier d'une *forme quadratique binaire*

$$ax^2+bxy+cy^2.$$

L'étude des formes quadratiques binaires a été débutée par Gauss et continuée par Hermite. On appelle formes *équivalentes* celles qui représentent les mêmes nombres; elles peuvent être déduites les unes des autres par des substitutions unimodulaires. Dans chaque classe de formes équivalentes, on cherche des formes *réduites*. Ces problèmes sont liés, en analyse, à l'étude des fonctions fuchsiennes.

L'étude des formes quadratiques à 3, 4, ... variables a donné lieu à de nombreux travaux, mais pose encore des problèmes importants. L'étude des formes de degré supérieur est seulement ébauchée.

L'étude des formes quadratiques binaires a été partiellement abandonnée et remplacée par celle des corps quadratiques, grâce à la relation:

$$ax^2+bxy+cy^2 = (\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)$$

avec α, β nombres quadratiques.

Bibliographie: 15, 18, 21, 30, 34, 43.

7. Approximations diophantiennes

Etant donné un nombre rationnel ou irrationnel, on peut chercher les fractions rationnelles à termes simples qui en diffèrent peu; c'est le problème des approximations diophantiennes.

La seule solution entièrement satisfaisante est celle des *fractions continues*. Il est remarquable qu'elle soit liée à la théorie des formes quadratiques binaires, du développement pé:iodique des irrationnelles du second degré et aux substitutions unimodulaires.

Ces théories ont été reprises et généralisées d'un point de vue géométrique très simple par MINKOWSKI. Cette méthode conduit à des *théorêmes d'existence* en théorie des nombres.

On peut rattacher à ces questions la démonstration de la *transcendance* des nombres e et π par HERMITE et LINDEMANN. SIEGEL a aussi démontré la transcendance d'autres nombres.

Bibliographie: 5, 6, 11, 15, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 38, 39, 40, 42.

8. Les nombres premiers

Les nombres premiers forment la base minimum permettant d'engendrer le groupe multiplicatif des entiers: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ Ce fait a pour conséquence une propriété des séries:

$$\Pi \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = \sum \frac{1}{n^s}$$

Cette série ne converge que pour $s > 1$; mais la série:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots$$

converge pour $s \geqq 1$.

La divergence de la série $\Sigma \frac{1}{n^s}$ pour $s = 1$ a notamment pour conséquence l'existence d'une *infinité de nombres premiers*. L'étude de cette série, appelée $\zeta(s)$, a fourni plus généralement des renseignements sur la répartition des nombres premiers. On peut y rattacher les études sur les séries de DIRICHLET, les études de HADAMARD sur les fonctions entières, notamment la définition du genre et les études de la VALLÉE POUSSION.

La méthode précédente pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers peut être généralisée. Par exemple, en désignant par p les nombres premiers égaux à la somme de 1