10. Les équations et les corps algébriques

10. Les équations et les corps algébriques

La théorie des équations conduit à la notion *d'extension* ou *de corps de nombres algébriques.*

On considère l'ensemble des nombres rationnels R et une équation irréductible:

$$\varphi(x) = 0$$

à cœfficients dans R. L'ensemble des polynomes $f(x)$ à cœfficients dans R, définis au module $\varphi(x)$ près, est un corps: les 4 opérations élémentaires sont possibles pour les éléments de cet ensemble. Tout se passe encore comme si on ajoutait à R une irrationnelle α, racine de l'équation considérée; on dit que ce corps est *l'extension* $R(\alpha)$ de R par α.

Si $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sont les différentes racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

on peut construire les extensions:

$$R(\alpha_1), \qquad R(\alpha_2), \ldots\ldots\ldots, R(\alpha_n).$$

Ces corps sont isomorphes, c'est-à-dire que l'on passe de l'un à l'autre par une substitution qui conserve les 4 opérations élémentaires et qui laisse invariants les éléments de R.

Plus généralement, on peut construire des *extensions algébriques finies*, en faisant successivement plusieurs extensions par adjonction d'une racine d'une équation à cœfficients dans le corps déjà formé.

Ce point de vue s'est dégagé progressivement dans la seconde moitié du XIX[e] siècle.

Bibliographie: 1, 2, 7, 9, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 30, 36, 44, 45, 46.

11. Propriétés arithmétiques de corps algébriques

Il a déjà été dit qu'on peut étendre aux corps algébriques la notion *d'entiers* et de *divisibilité* entre entiers, ce qui conduit à la construction des *idéaux.*