Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIBLIOGRAPHIE DE L'ARITHMÉTIQUE
Autor: Chatelet, Albert
Kapitel: 11. Propriétés arithmétiques de corps algébriques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37965

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

10. Les équations et les corps algébriques

La théorie des équations conduit à la notion *d'extension* ou *de corps de nombres algébriques.*

On considère l'ensemble des nombres rationnels R et une équation irréductible:

$$\varphi(x) = 0$$

à cœfficients dans R. L'ensemble des polynomes $f(x)$ à cœfficients dans R, définis au module $\varphi(x)$ près, est un corps: les 4 opérations élémentaires sont possibles pour les éléments de cet ensemble. Tout se passe encore comme si on ajoutait à R une irrationnelle α, racine de l'équation considérée; on dit que ce corps est *l'extension* $R(\alpha)$ de R par α.

Si $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sont les différentes racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

on peut construire les extensions:

$$R(\alpha_1), \qquad R(\alpha_2), \ldots\ldots\ldots, R(\alpha_n).$$

Ces corps sont isomorphes, c'est-à-dire que l'on passe de l'un à l'autre par une substitution qui conserve les 4 opérations élémentaires et qui laisse invariants les éléments de R.

Plus généralement, on peut construire des *extensions algébriques finies*, en faisant successivement plusieurs extensions par adjonction d'une racine d'une équation à cœfficients dans le corps déjà formé.

Ce point de vue s'est dégagé progressivement dans la seconde moitié du XIXe siècle.

Bibliographie: 1, 2, 7, 9, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 30, 36, 44, 45, 46.

11. Propriétés arithmétiques de corps algébriques

Il a déjà été dit qu'on peut étendre aux corps algébriques la notion *d'entiers* et de *divisibilité* entre entiers, ce qui conduit à la construction des *idéaux.*

On peut aussi chercher des relations arithmétiques entre plusieurs corps algébriques; le point de départ de ces études semble être la loi de réciprocité quadratique de Legendre et Gauss.

On étudie la possibilité de solutions en entiers x (ou y) des congruences:

$$x^2 - q \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$
$$y^2 - p \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ou p et q sont 2 nombres premiers (positifs). La loi de réciprocité quadratique établit un lien entre ces 2 congruences: si l'un des nombres premiers p ou q est de la forme $4n+1$, avec n entier, ces 2 congruences sont simultanément possibles ou impossibles; si aucun des nombres p et q n'est de la forme $4n+1$, la possibilité d'une des congruences exclut celle de l'autre.

Or la possibilité de la congruence:

$$x^2 - q \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

peut être interprétée comme une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre premier p soit décomposé en un produit de 2 idéaux premiers dans le corps quadratique engendré par $\sqrt{q}$. La loi de réciprocité quadratique établit ainsi un lien entre l'arithmétique dans les 2 corps quadratiques engendrés respectivement par $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$.

On peut d'ailleurs démontrer cette loi en construisant le corps de $\sqrt{q}$ au moyen de racines qièmes de l'unité. L'idée de cette démonstration provient de recherches de Gauss sur la construction des polygones réguliers. Cette démonstration introduit un lien entre l'arithmétique du corps des racines qièmes de l'unité et du corps quadratique engendré par $\sqrt{p}$.

D'autres *lois de réprocité* ont pu être démontrées et rassemblées dans la *théorie du corps des classes*.

Bibliographie: 1, 10, 17, 19, 20, 26, 27, 46.

12. Notion générale d'idéaux

L'extension d'un corps par un nombre algébrique a conduit à introduire d'autres extensions et à les définir d'un point de vue plus axiomatique. La notion *d'anneau* est ainsi apparue importante: