Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIBLIOGRAPHIE DE L'ARITHMÉTIQUE
Kapitel: 12. Notion générale d'idéaux
Autor: Chatelet, Albert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37965

On peut aussi chercher des relations arithmétiques entre plusieurs corps algébriques; le point de départ de ces études semble être la loi de réciprocité quadratique de Legendre et Gauss.

On étudie la possibilité de solutions en entiers x (ou y) des congruences:

$$x^2 - q \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$
$$y^2 - p \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ou p et q sont 2 nombres premiers (positifs). La loi de réciprocité quadratique établit un lien entre ces 2 congruences: si l'un des nombres premiers p ou q est de la forme $4n+1$, avec n entier, ces 2 congruences sont simultanément possibles ou impossibles; si aucun des nombres p et q n'est de la forme $4n+1$, la possibilité d'une des congruences exclut celle de l'autre.

Or la possibilité de la congruence:

$$x^2 - q \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

peut être interprétée comme une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre premier p soit décomposé en un produit de 2 idéaux premiers dans le corps quadratique engendré par $\sqrt{q}$. La loi de réciprocité quadratique établit ainsi un lien entre l'arithmétique dans les 2 corps quadratiques engendrés respectivement par $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$.

On peut d'ailleurs démontrer cette loi en construisant le corps de $\sqrt{q}$ au moyen de racines qièmes de l'unité. L'idée de cette démonstration provient de recherches de Gauss sur la construction des polygones réguliers. Cette démonstration introduit un lien entre l'arithmétique du corps des racines qièmes de l'unité et du corps quadratique engendré par $\sqrt{p}$.

D'autres *lois de réprocité* ont pu être démontrées et rassemblées dans la *théorie du corps des classes*.

Bibliographie: 1, 10, 17, 19, 20, 26, 27, 46.

12. Notion générale d'idéaux

L'extension d'un corps par un nombre algébrique a conduit à introduire d'autres extensions et à les définir d'un point de vue plus axiomatique. La notion *d'anneau* est ainsi apparue importante:

ensemble qui forme un groupe pour une opération d'addition et dans lequel est définie une opération de multiplication. Dans un anneau, un *idéal* est un ensemble qui contient la somme et la différence de 2 quelconques de ses éléments, ainsi que le produit d'un de ses éléments par un élément quelconque de l'anneau.

L'intérêt de ces notions est de permettre des raisonnements généraux applicables à des cas particuliers très différents. Par exemple: arithmétique dans un corps de nombres algébriques, géométrie des *variétés algébriques*, ...

A ces propriétés, on peut rattacher les études sur les *matrices*.

Bibliographie: 8, 9 ,10, 17, 25, 35, 46.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Artin, Gottingen 1959.
Theory of algebraïc numbers.
Cours professé à l'Université de Gottingen.
Exposé des notions et résultats classiques de la théorie des nombres algébriques: entiers, idéaux, unités, classes d'idéaux; cet exposé utilise méthodiquement la théorie des valuations.

2. E. Borel et J. Drach, Vuibert 1894.
Intoduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure, d'après les conférences de J. Tannery. Ouvrage ancien, mais qui reste une bonne introduction à l'étude des congruences, des imaginaires de Galois et des corps de nombres algébriques.

3. D. Carmichæl, Presses universitaires 1929.
Théorie des nombres. Traduction par A. Sallin.
Notice très sommaire sur l'indicateur ,les congruences, le théorème de Fermat et les racines primitives. Nombreux exercices.

4. D. Carmichæl, Presses universitaires 1929.
Analyse indéterminée. Traduction par A. Sallin.
Equations à résoudre en nombres entiers. Triangles ration-