II. Transformations affines et isométries d'une variété riemannienne.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur t est invariant par transport, $t(x)$ est invariant par le groupe d'holonomie Ψ_x. De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte:

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène* $V_m = G/H$ (G *effectif*) *à connexion linéaire invariante, si un tenseur* t *satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

a) t *est invariant par l'action de* G*;*

b) t *est invariant par transport;*

c) t (x) *est invariant par le groupe de Kostant* $K_x(G)$ *en un point* x *de* V_m.

Au champ t on peut substituer un champ Q de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est *à holonomie normale*, b entraîne c, donc a: Tout tenseur invariant par transport est invariant par G.

II. TRANSFORMATIONS AFFINES ET ISOMÉTRIES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit V_m une variété *riemannienne* de tenseur métrique g, que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne.* Toute isométrie ou *similitude* ($\mu^* g = c^2 g$; $c =$ const.) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où *le groupe d'holonomie est irréductible, toute transformation affine* reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite *est une similitude.* En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

a) La variété V_m est dite réductible si *son groupe d'holonomie connexe* Ψ_x^0 *est réductible dans le réel.* S'il en est ainsi, l'espace vectoriel T_x peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux T_x^a ($a = 0, 1, \dots k$), invariants par Ψ_x^0, tels que Ψ_x^0 induise l'identité sur T_x^0 et des représentations irréductibles sur

T_x^a $(a \neq 0)$. Cette décomposition est la *décomposition canonique* relative à la réductibilité. Il lui correspond une décomposition de Ψ_x^0 en produit direct $\Pi \Psi_{(b)x}$ $(b = 1, \ldots k)$, où $\Psi_{(b)x}$ induit sur T_x^a $(a \neq b)$ la représentation triviale (Borel-Lichnerowicz); Ψ_x^0 étant sous-groupe invariant de Ψ_x, le sous-espace T_x^0 est aussi invariant par Ψ_x; par transport de T_x^0 on obtient sur V_m le champ complètement intégrable T^0 et un feuilletage de V_m en feuilles localement euclidiennes. Si $T_x^0 = 0$, nous dirons brièvement que V_m est *sans partie euclidienne.*

b) Soit μ une transformation affine de V_m, S l'ensemble des sous-espaces de T_x invariants par Ψ_x. Si l est un chemin joignant x à $\mu^{-1}(x)$ l'automorphisme de T_x défini par:

$$\mu \circ \tau(l)$$

détermine une substitution $s(\mu)$ de S ne dépendant que de μ. On obtient ainsi un *homomorphisme* de $A(V_m)$, dans le groupe des substitutions de S. Si Ψ_x induit sur un élément $U_x \in S$ une représentation irréductible (resp. l'identité), il en est de même pour $s(\mu)\, U_x$.

c) Supposons V_m *simplement connexe.* La décomposition canonique définit alors $(k + 1)$ champs T^a de sous-espaces, invariants par transport le long d'un chemin arbitraire. Par suite si $\mu \in A(V_m)$, μ laisse invariant T^0 et permute éventuellement les T^a $(a \neq 0)$. Si $\mu \in A^0(V_m)$, tous les T^a sont invariants. Ainsi:

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne simplement connexe, chaque champ* T^a *défini par la décomposition canonique relative à la réductibilité est invariant par toute transformation affine de* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m)$.

8. *Etude des variétés riemanniennes complètes.*

Sur V_m, la distance $d(x, x')$ définie par le minimum de la longueur des chemins continûment différentiables par morceaux joignant x à x' détermine une structure d'espace métrique. Nous supposons V_m *complète*, c'est-à-dire complet l'espace métrique précédent

a) Soit μ une *similitude* qui ne soit pas une isométrie; en passant au besoin à l'inverse, on peut supposer $\mu^* g = c^2 g$ avec

$c < 1$. Par suite, μ réduit les longueurs et distances dans le rapport c. Du caractère complet, il résulte que μ admet un point fixe x_0. Si l est un lacet arbitraire en x_0 et si r_h est l'élément du groupe d'holonomie induit par le lacet $\mu^h\, l$ ($h = 0, 1, ...$), r_h tend vers l'identité quand $h \to \infty$. D'après (2-4), $r_h = \mu'^h \circ r_0 \circ \mu'^{-h}$ et le polynôme caractéristique de r_h est indépendant de h et coïncide avec celui de l'identité. On peut en déduire que le groupe d'holonomie de V_m est réduit à l'identité.

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne complète qui n'est pas localement euclidienne, toute similitude est une isométrie* [Kobayashi].

Si V_m complète est *irréductible* ($m \geqslant 2$) *toute transformation affine est une isométrie.*

b) Supposons V_m *complète et simplement connexe.* D'après un théorème classique de Georges de Rham, il existe une isométrie globale de V_m sur le produit riemannien de $(k+1)$ variétés W^a complètes simplement connexes. Pour $a = 0$, W^0 est euclidienne et pour $a \neq 0$, W^a est irréductible (de dimension $\geqslant 2$).

Soit $I^0(V_m)$ le plus grand groupe connexe d'isométries de V_m. A l'aide du théorème du § 7, on établit que $A^0(V_m)$ (resp. $I^0(V_m)$) peut être identifié au produit direct $\Pi A^0(W^a)$ (resp. $\Pi\, I^0(W^a)$). Du résultat précédent on déduit que $A^0(W^a) = I^0(W^a)$ pour $a \neq 0$. Ainsi:

THÉORÈME. — *Pour une variété riemannienne complète, simplement connexe,* $\mathrm{V}_m = \mathrm{W}^0 \times \mathrm{W}$ *où* W^0 *est euclidienne et* W *sans partie euclidienne,* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m)$ *est identique au produit direct* $\mathrm{A}^0(\mathrm{W}^0) \times \mathrm{I}^0(\mathrm{W})$ *agissant naturellement sur* V_m.

Les transformations strictement affines de $A^0(V_m)$ proviennent ainsi des transformations strictement affines de l'espace euclidien. Par étude du revêtement universel, on voit que *pour toute variété riemannienne complète* (sans hypothèse de simple connexité) *sans partie euclidienne* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m) = \mathrm{I}^0(\mathrm{V}_m)$. Une étude directe montre qu'on a la même conclusion pour toute variété riemannienne *compacte* (avec ou sans partie euclidienne) [Kenkaro Yano].

9. *Holonomie et isométries infinitésimales sur une variété riemannienne.*

a) Pour une variété riemannienne, les endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien T_x peuvent être identifiés à des 2-formes. Ainsi l'algèbre d'holonomie $\underline{\Psi}_x$ en x définit un sous-espace (désigné par la même notation) de l'espace vectoriel des 2-formes en x. Soit B_x l'orthocomplément de ce sous-espace par rapport au produit scalaire, noté (,), défini sur les 2-formes par la métrique. Si Y est un champ de vecteurs sur un voisinage U de la variété V_m, α une 2-forme sur U telle que $\alpha(x) \in \underline{\Psi}_x$ pour $x \in U$, on sait que:

$$(i(Y)\nabla\alpha)(x) \in \underline{\Psi}_x \tag{9-1}$$

De même si β est une 2-forme sur U telle que $\beta(x) \in B_x$ pour $x \in U$

$$(i(Y)\nabla\beta)(x) \in B_x \tag{9-2}$$

Cela posé si X est une *isométrie infinitésimale*, $A_X(x)$ définit une 2-forme en x. Avec un abus de notation, nous pouvons poser

$$A_X = \alpha + \beta \qquad (\text{avec } \alpha(x) \in \underline{\Psi}_x,\ \beta(x) \in B_x). \tag{9-3}$$

D'après (2-3), $(i(Y)\nabla A_X)(x) \in \underline{\Psi}_x$. De (9-1) et (9-2) il résulte $\nabla\beta = 0$ et $\beta(x)$ est dans l'algèbre de Lie du centralisateur connexe de Ψ_x^0 dans le groupe des rotations de T_x.

Si V_m est à Ψ_x^0 irréductible et admet une 2-forme à dérivée covariante nulle, elle est *kählerienne* ($m = 2n$). Dans ce cas, si la courbure de Ricci de la variété est non nulle, le centralisateur connexe de Ψ_x^0 est contenu dans Ψ_x^0 et l'on voit que $A_X(x) \in \underline{\Psi}_x$. On déduit de ces remarques.

THÉORÈME. — *Un espace homogène riemannien* $\mathrm{V}_m = \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est certainement à holonomie normale* ($\Psi_x^0 = \mathrm{K}_x(\mathrm{G})$) *sous l'une des hypothèses suivantes :*

a) *Si* V_m *n'admet pas de 2-formes à dérivée covariante nulle, en particulier si* V_m *irréductible n'est pas kählerien ;*

b) *Si* V_m *est kählerien, à* Ψ_x^0 *irréductible est à courbure de Ricci non nulle ;*

c) *Si* V_m *admet une courbure de Ricci non dégénérée.*

c se déduit de *a* et *b* à l'aide du théorème de réductibilité de G. de Rham.

b) De ce même théorème et du § 8, on déduit que si V_m est une variété riemannienne *complète*, $I^0(V_m)$ son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif), le groupe $K(I^0(V_m))$ est produit direct de groupes orthogonaux connexes irréductibles et d'un groupe certainement compact correspondant à la partie euclidienne.

Théorème. — *Pour toute variété riemannienne complète,* $K_x(I^0(V_m))$ *est compact.*

c) Supposons V_m *compacte.* On sait que $I^0(V_m)$ est alors compact (Elie Cartan). Si X est une isométrie infinitésimale, considérons la décomposition (9-3) et la 1-forme

$$\eta = i(X)\beta$$

De (9-3) on déduit:

$$\delta\eta(x) = (A_X(x), \beta(x)) = (\beta(x), \beta(x)) \geqq 0$$

où δ est l'opérateur de codifférentiation. Si V_m est compacte orientable, on en déduit par intégration $\beta = 0$ et, par passage à un revêtement, il en est de même si V_m est seulement compacte. Ainsi $K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0$.

Soit J_{x_0} le sous-groupe d'*isotropie* d'un point x_0, c'est-à-dire le sous-groupe de $I^0(V_m)$ laissant x_0 fixe, h un élément de J_{x_0}. Le groupe $I^0(V_m)$ étant compact, il existe un sous-groupe à un paramètre $\exp(tX)$ tel que $h = \exp(uX)$; $x(t) = \exp(tX)$ $(0 \leqslant t \leqslant u)$ engendre un lacet l en x_0. Si r est l'élément de Ψ_{x_0} correspondant à l, on a d'après (3-1)

$$\exp(uX)' = r \cdot \exp\left[-uA_X(x_0)\right].$$

Ainsi, si $\tilde{J}_{x_0}$ est le groupe linéaire d'isotropie, $\tilde{J}_{x_0} \subset \Psi_{x_0}$. Nous énoncerons:

THÉORÈME. — *Si* V_m *est une variété riemannienne compacte,* $I^0(V_m)$ *son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif),* J_x *le sous-groupe d'isotropie en* x, *on a*

$$K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0 \tag{9-4}$$

et

$$\tilde{J}_x \subset \Psi_x . \tag{9-5}$$

En particulier pour tout espace homogène riemannien compact, l'holonomie est normale.

III. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS. CAS RIEMANNIEN.

10. *Notion d'espace homogène réductif* (Nomizu].

Sur un espace homogène $V_m = G/H$ une *structure réductive* (ou d'espace homogène réductif) est définie par la donnée d'une *décomposition en somme directe de l'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *de* G

$$\underline{G} = \underline{H} + M \qquad (\underline{H} \cap M = 0) \tag{10-1}$$

telle que le sous-espace M *vérifie*

$$adj(H)\, M \subset M , \tag{10-2}$$

adj (H) est ici la restriction à H de la représentation adjointe de G. Tout élément λ de $\underline{G}$ s'écrit d'une manière et d'une seule $\lambda = \lambda_{\underline{H}} + \lambda_M$ $(\lambda_{\underline{H}} \in \underline{H};\ \lambda_M \in M)$. Par la projection naturelle p de G sur V_m, on peut identifier M avec l'espace vectoriel Tx_0 tangent en $x_0 = pe$ à V_m et adj (H) avec le groupe linéaire d'isotropie $\tilde{H}$. Les cas où H est compact ou connexe réductif dans G fournissent des exemples de structure réductive.

D'après (10-2), M définit sur l'espace fibré principal G de base V_m une connexion infinitésimale invariante par G. Si $P(V_m)$ est l'espace de repères défini par les repères de V_m déduits de l'un d'entre eux par l'action de G, le fibré $P(V_m)$ est isomorphe au fibré G. De la connexion invariante obtenue sur