

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DU TYPE DE WEIERSTRASS
Autor: Tarnawski, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37966>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION
DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION
DU TYPE DE WEIERSTRASS

par E. TARNAWSKI

(Reçu le 13 mai 1962)

M. G. de Rahm a prouvé [1] d'une manière très simple qu'une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varphi(b^k x), \quad (1)$$

où b est un nombre pair, $a = b^{-1}$ et

$$\varphi(x) = \min_p |x - p| \quad (p \text{ entier}) \quad (2)$$

n'admet pas de dérivée. Il a remarqué aussi que la méthode de la démonstration ne s'adapte pas au cas où $\varphi(x) = \cos x$ et que aussi, si dans ce dernier cas $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, $0 < a < 1$, b est impair (exemple de Weierstrass), la démonstration n'est plus simple du tout.

Cependant dans [2] j'ai pu donner une méthode permettant de démontrer, assez facilement, la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ définie par (1) dans le cas où les coefficients a, b satisfont aux conditions énumérées à la page 27 de ladite note (Theorem 9d) tandis que la fonction $\varphi(x)$ est périodique, non constante et vérifie outre la condition de Lipschitz la condition suivante:

pour tout x il existe un nombre h_x de module constant h^* (indépendant de x) tel que l'inégalité

$$|\varphi(x + h_x) - \varphi(x)| \geq d > 0$$

est satisfaite pour une certaine constante d et pour tout x ¹⁾.

¹⁾ Cf. [2], p. 13.

Cette dernière condition est par exemple remplie par les fonctions périodiques (de période l) dont les deux premières dérivées sont continues et qui dans l'intervalle $\langle 0, l \rangle$ n'ont qu'un nombre fini de zéros ¹⁾.

Par contre, la démonstration de la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ lorsque $\varphi(x) = \cos x$ est particulièrement simple au point de vue des calculs numériques qu'elle nécessite si l'on pose dans la formule (1) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ ²⁾.

Voici la démonstration (qui semble avoir une valeur didactique) de la non-dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cos 4^k x. \quad (3)$$

Considérons les intervalles fermés à gauche Δ_m de même longueur $\frac{\pi}{2}$ dont les extrémités gauches se trouvent aux points $\frac{\pi}{2} m$ (m entier). x_0 étant une valeur établie, m déterminé par la relation $4^n x_0 \in \Delta_m$, définissons la suite

$$h_n = (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}. \quad (4)$$

Calculons

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = A_1 + A_2 + A_3,$$

où

$$A_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos \left[4^k \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^k x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

$$A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\cos \left[4^n \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^n x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

1) Cf. le lemme 3 de [2], p. 18.

2) Cf. l'astérisque 18) de [2], p. 33.

$$A_3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos \left[4^k \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^k x_0}{(-1)^m \pi / 2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

a) Afin de limiter la somme A_1 faisons les substitutions

$$4^k x_0 = u, \quad \frac{\pi}{2 \cdot 4^{n-k}} = h$$

Attendu que

$$\left| \frac{\cos(u + (-1)^m h) - \cos u}{(-1)^m h / 4^k} \right| = \left| \frac{-\sin\left(u + (-1)^m \frac{h}{2}\right)}{4^{-k}} \right|$$

$$\left| \frac{\sin(-1)^m \frac{h}{2}}{(-1)^m \frac{h}{2}} \right| < 4^k$$

on a

$$|A_1| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1}{2} (3^n - 1). \tag{5}$$

b) La limitation de l'expression A_2 est d'après

$$\sin \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4} \right] \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

la suivante

$$|A_2| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{2}{\pi} 4^n \cdot \left| \cos \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right] - \cos 4^n x_0 \right| \tag{6}$$

$$= \frac{2}{\pi} 3^n \left| -2 \sin \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4} \right] \sin \left((-1)^m \frac{\pi}{4} \right) \right| \geq \frac{2}{\pi} 3^n.$$

c) Vu que le nombre $4^k \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}$ pour $k > n$ est un multiple de 2π , on a

$$A_3 = 0. \tag{7}$$

Par conséquent on obtient, en tenant compte de (5), (6), (7), que pour la suite $\{h_n\}$ définie par la formule (4) les relations ont lieu

$$\left| \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right| \geq |A_2| - |A_1| \geq \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) 3^n \rightarrow \infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G. DE RAHM, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
2. E. TARNAWSKI, Continuous functions in the logarithmic—power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.

Chaire de Mathématiques
Ecole Polytechnique de Gdańsk
Pologne.