Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1963)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CHOIX D'AXIOMES POUR LA GÉOMÉTRIE A L'ÉCOLE

Autor: Stone, Marshall H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38771

LE CHOIX D'AXIOMES POUR LA GÉOMÉTRIE A L'ÉCOLE

par Marshall H. STONE, Chicago

L'expérience nous montre que le problème le plus difficile de l'enseignement secondaire est posé par l'initiation à la géométrie axiomatique. C'est la raison pour laquelle aujourd'hui on recherche avec acharnement de nouveaux systèmes d'axiomes plus faciles à enseigner aux élèves du niveau secondaire. Par conséquent, je trouve que le moment est opportun pour évaluer les différents systèmes que l'on a proposés, presque toujours sans assez d'études comparatives. Une telle évaluation s'impose, d'ailleurs, parce que l'on pourrait élever des objections critiques contre tous les systèmes qui ont gagné la préférence jusqu'ici.

En ce qui concerne le rapport de Dubrovnik, une telle évaluation aurait le mérite d'éliminer les ambiguïtés qui s'y sont glissées à cause d'un certain manque d'accord entre les auteurs. Seule une telle évaluation peut éclaircir le contenu géométrique du rapport pour ceux qui voudraient passer maintenant à l'expérimentation pédagogique ou didactique essentielle à sa réalisation.

Le choix d'axiomes pour une géométrie élémentaire repose, à mon avis, sur six principes fondamentaux.

I. Pour des raisons culturelles et techniques les élèves entre les âges de 15 ou 16 et 18 ans doivent prendre connaissance d'une présentation axiomatique de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

II. Cette présentation doit donner la première place aux concepts et relations géométriques déjà bien connus pour l'élève sur le plan intuitif.

III. Le passage des axiomes aux théorèmes principaux doit être relativement facile et doit surtout éviter les longs et ennuyeux arguments techniques qui résultent trop souvent d'une façon maladroite d'aborder certains chapitres de la géométrie, notamment ceux qui établissent les propriétés de l'ordre géométrique et celles de l'angle.

IV. La présentation axiomatique doit fournir une base suffisante pour une analyse rapide des configurations géométriques fréquemment rencontrées dans les applications — par exemple celles qui sont engendrées par un nombre fini de points, telles que les triangles, les polygones, et les polyhèdres.

V. En même temps cette présentation doit fournir une base suffisante pour le développement rapide de ces méthodes algébriques préférées en mathématique moderne — surtout de celles qui se rattachent aux théories des groupes et des vecteurs.

VI. Si l'on se rend compte de la nécessité eventuelle d'envisager les applications physiques de la géométrie pure, il faut que la présentation implique pour la ligne droite une structure compatible avec celle du temps, comme elle est vue par le physicien contemporain.

Je me permets quelques petites observations d'ordre général sur les principes que je viens d'énoncer, les discussions soulevées par nos premières séances m'ayant démontré qu'autrement je risquerais des malentendus par la suite.

Au préalable j'avais cru inutile une discussion des raisons culturelles et techniques pour lesquelles il faut présenter à nos jeunes élèves une axiomatique de la géométrie, aussi bien que d'autres branches de la mathématique. Etant donné que la mathématique telle que nous la comprenons aujourd'hui et telle que nous l'appliquons dans les domaines les plus variés de la pensée humaine serait complètement inaccessible sans l'utilisation de la méthode axiomatique, c'est notre devoir d'enseigner cette méthode sur le niveau universitaire sinon à un niveau inférieur. Mais je maintiens que l'initiation à la méthode axiomatique se trouve à sa propre place dans l'école secondaire, car autrement nous reserverions aux universitaires le privilège de connaître un des plus beaux accomplissements intellectuels de la race humaine — l'axiomatisation par les mathématiciens grecs de la géométrie pratique. A mon avis, un bon élève de 17 à 18 ans est capable d'apprendre l'essentiel d'un axiomatique bien choisi pour la géométrie et d'apprécier ce premier exemple d'une axiomatique puissante à une vaste portée technique. Je dirais même que s'il n'en est pas capable à cet âge-là, il aura peu de possibilités de l'être plus tard, à l'université.

Pour éviter une interprétation trop large de ce que je veux dire par la phrase « la présentation axiomatique de la géométrie, » il me faut expliciter que j'exclus ici toute analyse formelle du langage de la mathématique ou des procédés logiques dont on se sert dans les démonstrations mathématiques. Bien sûr, nos élèves doivent arriver à un moment donné à comprendre aussi la logique formelle et ses relations avec la mathématique. Mais à mon avis on ferait mieux de réserver ce moment à un stage plus avancé, à l'université. Quant au niveau secondaire il suffit d'insister sur un emploi précis et soigné des ressources de la langue maternelle et sur une application correcte d'un petit nombre de principes informels du raisonnement mathématique.

S'il y a un point sur lequel les mathématiciens se sont mis aujourd'hui d'accord, c'est que le vecteur est un instrument indispensable pour l'étude de la mathématique supérieure et ses applications. Par conséquent, on insiste que l'enseignement secondaire de la mathématique fournisse la base pour l'introduction immédiate du vecteur et soit même poussé jusqu'au point où l'élève qui sort de l'école aura déjà acquis les notions fondamentales sur les vecteurs et leurs applications à la géométrie et à la physique. Notre cinquième principe exprime cette demande.

Le sixième point est trop souvent négligé, il me semble, dans les discussions parmi les mathématiciens qui s'occupent de l'enseignement. Pourtant il est tout à fait évident que la connaissance de l'espace physique est inséparable de celle du temps — en effet, c'est même un principe de base de la théorie de la relativité. Par conséquent, aussitôt que l'on voudrait rapprocher l'enseignement de la mathématique et de la physique, il faut comparer la structure de la ligne droite en géométrie avec celle du temps en physique, pour en constater la compatibilité: les deux structures sont celles qui ressortent quand on munit un ensemble complètement ordonné d'une relation d'équivalence entre ses intervalles. En vue de ce lien étroit entre l'espace et le temps une modification de nos idées sur la nature du temps entraînerait évidemment une modification de notre manière de comprendre l'espace. Or, la physique moderne est bien capable d'arriver à une nouvelle conception du temps, à la suite d'une étude approfondie des phénomènes microcosmiques ou macrocosmiques. Par conséquent un axiomatique qui fixe catégoriquement la structure de la ligne droite risque d'être bousculé d'un jour à l'autre par le développement de la physique contemporaine. En tout cas, sans faire appel à cette possibilité, on doit constater qu'il serait très utile de préparer la considération de la cinématique par une petite étude axiomatique du temps, mise en relation avec la structure géométrique de la ligne droite.

Puisque le choix d'axiomes dépend en quelque sorte des connaissances géométriques intuitives que l'on peut demander chez les élèves du secondaire, on ne peut pas parler d'un véritable choix sans se convaincre de la possibilité d'adapter ces connaissances préalables au système d'axiomes auquel on voudrait donner la préférence. Autrement dit, il faut démontrer que les êtres et les faits géométriques que l'on présentera à l'enfant ou que l'on aidera l'enfant à découvrir pour lui-même ne sont pas complètement fixés par des phénomènes psychologiques. Tout en admettant qu'il y a des principes psychologiques et didactiques qu'il faut reconnaître et respecter pour amener l'enfant à une compréhension intuitive de la géométrie, je suis persuadé de la possibilité de varier entre des limites assez larges la contenue de la géométrie intuitive enseignée aux élèves entre les âges de 6 et 15 ans. Par conséquent il me semble qu'en principe on peut espérer de préparer ces élèves à entreprendre avec succès pendant les dernières années de l'école secondaire l'étude de n'importe quelle présentation axiomatique choisie entre un assez grand nombre de présentations nettement différentes entre elles. Donc le choix d'axiomes est contrôlé mais pas déterminé par notre point II.

Ceci dit, passons maintenant à l'examen d'un certain nombre de ces axiomatiques possibles, en commençant par un système dû à M. Artin (voir le Rapport de Dubrovnik). La base de ce système comprend

(1) un ensemble E non-vide de points;

(2) un système vectoriel V sur un corps scalaire prescrit;

(3) une application de l'ensemble de couples de points dans le système vectoriel,

$$(P,Q) \rightarrow v = v\,(P,Q) \in V.$$

On demande en outre les propriétés suivantes:

(4) $v(P,Q,) + v(Q,R) = v(P,R)$;

(5) $v(P,Q) = 0$ implique $P = Q$;

(6) P et v étant donnés, il existe Q tel que $v(P,Q) = v$.

En utilisant la structure algébrique de V, on introduit facilement une structure géométrique dans E. Par exemple on définit aussitôt les variétés linéaires dans E et on déduit rapidement des axiomes ci-dessus leurs propriétés principales. En même temps on peut introduire dans l'espace E un système de coordonnés, tirés du corps scalaire donné. Evidemment nos axiomes ne caractérisent que la géométrie affine de l'espace E. Ils ne fixent point la dimension linéaire de V, ni la nature du corps scalaire, ni les propriétés métriques d'E. Il faut donc complèter cet axiomatique en ajoutant quelques postulats encore. La question de la dimension est résolue directement en demandant que l'espace E, en tant que variété linéaire, soit engendrée par un nombre donné de points — c'est-à-dire, par trois points pour avoir le cas du plan, quatre pour avoir l'espace à trois dimensions, et ainsi de suite. La question du corps scalaire, qui est directement lié aux propriétés des lignes droites dans E (c'est-à-dire, des variétés linéaires d'une dimension), peut être résolue de la même façon, en spécifiant ce corps directement et arbitrairement. Mais on peut aussi suivre une voie plus intuitive en postulant pour la ligne droite une structure d'ordre qui entraîne l'identification du corps scalaire avec le corps des nombres réels. Enfin, pour imposer une structure métrique sur l'espace affine E, on a un choix entre plusieures possibilités. Par exemple, quand le corps scalaire est le corps réel, on peut définir la distance entre deux points et postuler l'identité de Pythagore sous une forme convenable pour cette distance. Une alternative attrayante est celle indiquée par M. Choquet dans une contribution que nous analyserons plus loin. Il s'agit d'étudier les projections ortogonales comme base pour l'introduction d'un produit scalaire dans V et de postuler la symétrie géométrique qui rend symétrique ce produit.

L'axiomatique de M. Artin a le mérite d'aller directement à l'essentiel: dès le commencement l'attention est fixée sur le rôle géométrique du vecteur et le développement des techniques de la géométrie analytique ou mieux dit, algébrique. La présentation est d'une simplicité et d'une élégance surprenantes. Tout de même on constate que cette manière de traiter la géométrie est tellement éloignée de l'intuition qu'elle laisse l'impression d'une artificialité à la fois arbitraire et répugnante. Pour employer le langage pittoresque de M. Choquet, on peut dire que tout l'appareil vectoriel est parachuté d'un coup dans une situation qui demande plutôt une réduction en détail suggérée par l'intuition. Sans doute, il serait bien possible de préparer l'élève par une longue familiarité avec la géométrie informelle à accepter avec moins de résistance l'axiomatique proposé par M. Artin. Mais je crois que l'on ne réussira pas à ôter la mauvaise impression d'un tour de force assez arbitraire et brutal. Cette critique, évidemment, n'a rien à faire avec la logique, mais beaucoup à faire avec l'art d'enseigner. A mon avis, elle suffit pour nous déconseiller cette voie pour approcher l'axiomatisation de la géométrie, bien que le système d'axiomes en question soit impeccable au point de vue de la logique et résume d'une façon si succincte l'essence de nos connaissances géométriques dans le domaine euclidien.

Plusieurs axiomatiques différents qui partagent en ce moment l'approbation de beaucoup de connaisseurs de la matière donnent une place centrale au concept de la distance. C'est-à-dire, en ces systèmes on conçoit l'espace primitif comme un espace métrique dans le sens courant de ce mot, et l'on ajoute une série de propriétés axiomatiques qui suffisent à l'identifier avec l'espace classique d'Euclide. Je crois que le célèbre mathématicien américain G. D. Birkhoff et son collaborateur Ralph Beatley ont été les premiers à écrire un texte d'école inspiré par ce point de vue. Ces auteurs n'ont pas seulement postulé que l'espace admette une distance pythagorienne, mais ils ont aussi demandé que les angles soient mesurables moyennant les nombres réels.

En bref, la géométrie qu'ils ont proposée est une géométrie de règle et rapporteur. Bien que le livre n'ait pas gagné le succès qu'il méritait — et cela, je crois, parce qu'il a devancé en Amérique la période favorable — ses principes fondamentaux ont été repris récemment par d'autres mathématiciens qui cherchaient à rendre plus accessibles les axiomatiques d'Euclide et de Hilbert par des modifications basées sur la postulation d'une distance. En première ligne, je citerai le texte préparé par le School Mathematics Study Group (SMSG) aux Etats-Unis et le système proposé par M. Choquet et reproduit dans sa conférence d'Aarhus. Je n'essayerai pas de résumer ici les systèmes de l'SMSG et de M. Choquet, le trouvant plus intéressant de rappeler que les travaux de M. Menger sur les espaces métriques ont montré, il y a une trentaine d'années, que l'espace euclidien peut être caractérisé parmi eux exclusivement par ses propriétés métriques. En principe, donc, on doit chercher un moyen pour donner un axiomatique fondé sur les idées de MM. Menger, Schoenberg et Wilson. L'observation fondamentale sur laquelle repose cette entreprise est l'identification des conditions algébriques auxquelles un espace métrique *d'un nombre fini de points* doit satisfaire pour être isométrique à un sous-espace d'un espace euclidien. Il est bien connu que ces conditions peuvent s'exprimer très facilement en termes des distances mutuelles entre les points de l'espace fini donné. A vrai dire je ne suis pas trop optimiste pour la solution des problèmes pédagogiques offerts par ce programme de M. Menger, mais je crois qu'un effort sérieux pour les identifier et les réduire serait d'un très grand intérêt. Au moins, on pourrait peut-être présenter le système qui en résultera aux étudiants de l'université comme compagnon et analogue de l'axiomatique de M. Artin.

Si le système de M. Artin donne la première place à une application de couples de points dans un système vectoriel, ceux-ci que nous venons de citer l'offrent à une application de couples de points dans le corps réel. Par conséquent ces derniers s'exposent à la même critique que l'on peut soulever contre le système de M. Artin parce qu'il demande une préparation assez approfondie en algèbre. En effet, on ne peut pas cacher le fait que le corps réel, loin d'être un objet mathématique assez simple et intuitivement compréhensible, se dégage avec difficulté d'un fond moitié algébrique, moitié géométrique. On n'évite pas cette vérité en parachutant tout l'appareil du corps réel dans la géométrie pour être à même d'introduire aussitôt le concept de la distance. D'ailleurs, pour renforcer un axiomatique fondé sur le corps réel il faut remplacer les idées vagues et souvent confuses de nos jeunes élèves à propos des nombres réels par une compréhension beaucoup plus précise. Ça veut dire qu'il faut faire face au problème de l'axiomatisation des nombres réels. Au point de vue géométrique cela implique un retour à l'étude des propriétés de la ligne droite. A la fin, on peut douter que l'appel aux nombres réels produise plus de difficultés qu'il n'évite. Il y a encore une objection à cet appel qu'il faut citer. Tandis que les autres sont plutôt d'excellents arguments pour lier l'étude de la géométrie intuitive avec une bonne présentation de l'algèbre moderne comme préparation à l'analyse axiomatique de la géométrie, celle-ci est une objection de principe. En effet, fonder la géométrie sur le corps réel équivaut à trancher par fiat un problème fondamental de la physique — celui du temps. A mon avis il serait beaucoup plus prudent à l'heure actuelle de ne pas donner une place si centrale au corps réel dans l'axiomatisation de la géométrie.

Un des concepts les plus importants en géométrie est celui d'une transformation géométrique. Dans les axiomes d'Euclide et de Hilbert il est à peine caché, et dans d'autres systèmes il joue souvent un rôle explicite. Par exemple, M. Choquet fait entrer dans ses axiomes les symétries autour d'une ligne droite du plan. Or, depuis les recherches de Félix Klein, on sait que d'accord avec son célèbre « programme d'Erlangen » toute structure géométrique peut être caractérisée par un groupe de transformations. Cette découverte fondamentale de Klein a rendu séduisant et assez important le projet de commencer plus tôt dans l'enseignement la discussion de la transformation et son rôle géométrique. Il est même possible d'envisager la présentation d'un axiomatique basé sur le concept de transformation. Les détails mathématiques d'un tel axiomatique ont été élaborés par M. Bachmann, et son système d'axiomes a été modifié et adapté à l'instruction élémentaire par d'autres mathématiciens, surtout en Allemagne. Je ne suis pas à même de commenter le succès que ces systèmes ont obtenu dans l'enseignement. Néanmoins il est évident que deux grands obstacles s'opposent à une réussite facile dans cette voie. D'abord, le concept de transformation est assez difficile à comprendre. Certainement l'élève a besoin d'une longue préparation en géométrie intuitive pour arriver à dégager de ses expériences une idée de ce qu'est une transformation. On ne sait pas exactement à quel stage il peut dominer ce concept, mais on sera prudent de faire un nombre considérable d'expériences bien contrôlées avant de croire que les élèves de moins de 16 ou peut-être 15 ans en soient capables. L'autre obstacle est constitué encore une fois par la nécessité d'une préparation assez étendue en algèbre, car une bonne connaissance élémentaire de la théorie des groupes est indispensable pour la discussion de la géométrie des transformations. Bien que je croie que ces obstacles pourraient être surmontés et les élèves préparés pour étudier la géométrie au niveau secondaire dans l'esprit du programme d'Erlangen, je dois observer que l'élaboration d'un axiomatique pur d'accord avec ce programme est certainement trop compliquée pour être presentée dans les écoles secondaires. Il faut donc chercher un système mixte qui se prête à un developpement assez facile.

Pour terminer cette revue incomplète et trop rapide des systèmes axiomatiques de la géométrie, je citerai encore un système dû à M. Artin. Il s'agit précisément d'un système mixte dans lequel la théorie des groupes de transformations joue un assez grand rôle. L'exposé que M. Artin a donné de ce système dans le beau livre intitulé « Geometrical Algebra » est destiné à l'enseignement supérieur. Un examen détaillé de cette présentation montre, je crois, qu'une adaptation au niveau secondaire est tout à fait possible, car au fond les arguments utilisés sont d'une simplicité surprenante. On prend comme point de départ les éléments de la théorie des lignes parallèles et introduit presque immédiatement une famille de transformations caractérisées par leur action sur les lignes droites, surtout en relation avec le concept du parallélisme. Un petit nombre de raisonnements élémentaires et faciles suffit à dégager le groupe abelien des translations et une partie de son anneau d'endomorphismes qui en est un sous corps. Ici il faut évidemment exiger de l'élève une préparation assez sérieuse en théorie de groupes abstraits. En première ligne il faut mettre le théorème selon lequel les endomorphismes d'un groupe abelien quelconque constituent un anneau, et sa relation à la théorie des modules et des systèmes vectoriels. En insistant sur ce théorème, qui est d'ailleurs assez élémentaire, on peut donner à l'exposé de M. Artin un aspect un peu plus frappant, il me semble. Aussitôt que l'on a fait ressortir cet appareil algébrico-géométrique de l'étude élémentaire du plan, on est à même d'introduire les vecteurs et les systèmes de coordonnées qui s'y rattachent. Arrivé à ce point, qui est essentiellement le point de départ dans l'axiomatisation de M. Artin, citée au commencement de cette discussion, on suit le même chemin qu'auparavant pour arriver au corps réel et à la géométrie métrique. Dans le cours du développement que je viens d'esquisser il va sans dire qu'il est nécessaire d'introduire des axiomes qui précisent la structure de la famille de transformations considérée. Or on constate que ces axiomes, assez naturels en apparence, ne sont que des formes déguisées des propriétés de Pascal et de Desargues. Par conséquent cet axiomatique de M. Artin illumine d'une façon assez remarquable et lucide les bases de la géométrie projective et leur rôle dans la géométrie euclidienne. Le succès de ce système repose sur l'habileté avec laquelle M. Artin a su séparer les difficultés rencontrées dans l'analyse de nos idées intuitives sur l'espace et les résoudre individuellement, grâce à l'utilisation des concepts fondamentaux de l'algèbre et de la théorie de l'ordre. A mon avis, un système qui réussit si bien à faire ressortir les éléments les plus essentiels de la géométrie mérite d'être étudié comme base de l'enseignement secondaire dans la matière. Je suis très optimiste à propos des résultats qu'on obtiendra.

De ces considérations sur les différentes manières d'introduire l'axiomatique dans la géométrie il résulte qu'un problème pédagogique à la fois bien défini et très important se pose: comment développer chez nos jeunes élèves le concept de la transformation géométrique — ou, en termes équivalents — le concept de fonction au sens le plus large du mot? On voit que l'idée d'une transformation ou d'une fonction joue un rôle indispensable dans presque tous les systèmes qu'on a proposé pour l'axiomatisation de la géométrie. En certains cas, ce rôle est assez bien caché ou assez modeste, mais tout de même indispensable. En d'autres, c'est à la fois évident et important. Pour savoir bien enseigner ce concept fondamental de transformation ou de fonction il serait bien d'avoir plus de connaissances psychologiques sur le développement conceptuel chez l'enfant que nous n'avons à présent. Par conséquent il est à espérer que l'examen de ce problème non seulement par les mathématiciens mais aussi par les psychologues sera entrepris sans délai par tous les moyens — analytiques et expérimentaux — possibles. Au point de vue pratique, on doit commencer la préparation de nos élèves pour comprendre ce concept de base pour toute la mathématique déjà dans les classes primaires.