§ 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée COMPRENANT TOUTE L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

§ 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée comprenant toute l'échelle logarithmico-puissance

Considérons la fonction $f(x)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} (b^{-\beta})^k \varphi(b^k x), \tag{14}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction définie par la formule (2) et $b > 0$ est un nombre pair. Le domaine de variation des paramètres α, β qui y interviennent sera le suivant:

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{15}$$

et si $\beta = 0$, on supposera $\alpha > 1$, tandis que si $\beta = 1$ on admettra $\alpha \leqslant 1$. Ceci étant, la continuité de la fonction $f(x)$ et les hypothèses du théorème 1 sont réalisées.

Remarquons que
pour $0 < \beta < 1$, les valeurs du paramètre α étant arbitraires, pour $\beta = 0$, $\alpha > 1$ et pour $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 0$ le produit

$$a_k b_k = k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} \tag{16}$$

est minoré par une constante indépendante de k. La fonction f étant partout continue est en vertu du théorème 2 partout non dérivable pour ces valeurs des paramètres β, α.

Quant aux conditions suffisantes pour qu'une fonction $f(x)$ de la forme (1) appartienne à la classe $H(\delta, \gamma)$ lorsque les coefficients a_n, b_n satisfont aux conditions (7), elles ont été exprimées par l'inégalité (33) de [4] (p. 26). Si l'on tient compte de celle-ci ainsi que de la forme de la fonction (14), on peut formuler la condition suffisante pour que la fonction (14) soit de la classe $H(\delta, \gamma)$ moyennant les deux inégalités

$$b^{(\delta-1)n} n^{-\gamma} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} < M \tag{17}$$

$$b^{\delta(n+1)} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} b^{-\beta k} < M, \tag{18}$$

où M est une constante indépendante de n.

Afin de trouver la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) lorsque $n \to \infty$, on appliquera le théorème de Stolz avec les suivantes valeurs de paramètres δ, γ, β, α:

$$0 \leqslant \delta < 1, \ \gamma \text{ arbitraire ou } \delta = 1, \ \gamma > 0$$

et simultanément

$$0 \leqslant \beta < 1, \ \alpha \text{ arbitraire ou } \beta = 1, \ \alpha \leqslant 1.$$

La recherche de la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) sera remplacée par la recherche de la limite du produit

$$n^{-(\alpha+\gamma)}\, b^{n(\delta-\beta)} \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\gamma} b^{\delta-1}\right]^{-1} \tag{19}$$

où les paramètres admettent les valeurs considérées ci-dessus. On voit bien que cette limite est finie dans le cas où

$$0 \leqslant \beta < 1\,, \ \delta = \beta\,, \ \alpha+\gamma \geqslant 0\,, \tag{20}$$

ainsi que dans celui où

$$\beta = 1, \ \delta = \beta, \ \gamma = 1-\alpha\,. \tag{21}$$

Voyons maintenant si pour les valeurs des paramètres δ, γ ainsi établies, la condition (18) est vérifiée. Si l'on pose $k-n-1 = p$ et l'on admet $\delta = \beta$, l'expression à gauche de l'inégalité (18) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}(n+1)^{-\gamma}(p+n+1)^{-\alpha} \tag{22}$$

a) Si $0 < \beta < 1$, $\gamma = -\alpha$, on a

pour $\alpha \geqslant 0$: $b^{-\beta p}\left(\dfrac{n+1}{p+n+1}\right)^{\alpha} \leqslant b^{-\beta p}$, la série (22) est donc

bornée pour chaque n par le nombre $M = \sum\limits_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}$;

pour $\alpha < 0$ on a pour tout $n \geqslant 1$: $\left(\dfrac{p+n+1}{n+1}\right)^{-\alpha} \leqslant \left(\dfrac{p}{2}+1\right)^{-\alpha}$.

Dans ce cas l'inégalité (18) est satisfaite en admettant

$$M = \sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha} \quad \text{pour tout } n.$$

b) Si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, la série (22) prend la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} (n+1)^{-\gamma}(p+n+1)^{-\alpha} .$$

En appliquant le critère intégral de la convergence des séries on limite la somme de la série par les nombres $(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$, $\frac{1}{2}+(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$.

L'inégalité (18) est donc vérifiée indépendamment de la valeur de n lorsque $-\alpha-\gamma+1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\gamma \geqslant 1-\alpha$.

c) Admettons $\beta = 1$, $\gamma = 1-\alpha$. De même que dans le cas *a)* l'inégalité (18) est satisfaite pout tout n: si $\alpha < 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha}$ et si $\alpha \geqslant 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}$.

Si l'on rapproche les cas *a)*, *b)*, *c)* ainsi que (20) et (21), on trouve

a) si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,

b) si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, on a $f \in H(0, 1-\alpha)$,

c) si $\beta = 1$, $\alpha \leq 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$.

Le théorème 1 servira à trouver une condition suffisante pour que la fonction $f(x)$ définie par la formule (14) satisfasse aux points de l'ensemble Z [1]) la relation (4) avec $\psi(h) = h^{\delta}|\log h|^{\gamma}$ ou, comme nous le dirons dans la suite, pour que la fonction $f(x)$ soit aux points de l'ensemble Z de la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. Cette propriété de la fonction $f(x)$ pourra s'écrire sous la forme $f \in H_Z^{\infty}(\delta, \gamma)$.

Prenons un point $x_0 \in Z$ parmi les points du partage des

---

1) L'ensemble Z a été défini à la fin de la démonstration du théorème 1 comme l'ensemble de tous les points du partage de chacun des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier) en b^n intervalles égaux.

intervalles $< p, p+1 >$ (p entier) en b^{n_0} sous-intervalles égaux. Si pour $n \to \infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{(b_n^{-1})^\delta \mid \log b_n^{-1} \mid^\gamma} = \infty,$$

la fonction $f(x)$ est au point x_0 de la classe $H^\infty(\delta, \gamma)$. Si l'on présente le quotient sous la forme

$$\frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{b_n^{-1}} \cdot \frac{b_n^{-1}}{(b_n^{-1})^\delta \mid \log b_n^{-1} \mid^\gamma}$$

et l'on tient compte des relations (13) et (16), on trouve comme valeur de ce quotient

$$\frac{b^{(\delta-1)n}}{n^\gamma(\log b)^\gamma}\rho_{n_0} + \frac{b^{(\delta-1)n}}{n^\gamma(\log b)^\gamma}\sum_{k=n_0}^{n-1} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k}.$$

Attendu que le premier composant de cette somme tend vers zéro, lorsque $n \to \infty$, dans tout le domaine de variation des paramètres δ, γ, on pourra se contenter d'examiner uniquement le second composant. L'étude de la limite de cette expression sera remplacée par l'étude de la limite du produit

$$(n-1)^{-(\alpha+\gamma)} b^{n(\delta-\beta)+\beta-1} \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^\gamma - b^{\delta-1}\right]^{-1}$$

et l'on y admettra les mêmes valeurs des paramètres que dans le cas de l'étude de l'expression à gauche de l'inégalité (17).

Considérons les cas qui correspondent à *a)*, *b)*, *c)* énumérés ci-dessus. Si

$$0 < \beta < 1, \ \delta = \beta, \ \gamma < -\alpha$$

ou bien

$$\beta = 0, \ \delta = \beta, \ \gamma < -\alpha, \ \alpha > 1,$$

on conclut que $f \in H_Z^\infty(\beta, \gamma)$.

Dans le cas où $\beta = 1$, $\delta = \beta$, $\gamma > 0$ on trouve $f \in H_Z^\infty(1, \gamma)$ avec $\gamma < 1-\alpha$.

En résumé, il vient:

si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,
et si $\gamma < -\alpha$ on a $f \in H_Z^\infty(\beta, \gamma)$,
si $\beta = 0$, $\alpha > 1$ on a $f \in H(0, 1-\alpha)$
et lorsque $\gamma < -\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(0, \gamma)$,
si enfin $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$,
et lorsque $0 < \gamma < 1-\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(1, \gamma)$.

Ainsi la fonction de l'exemple de M. G. de Rahm ($\beta = 1$, $\alpha = 0$) est de la classe $H(1, 1)$, sans appartenir à aucune des classes $H(1, \gamma)$ ($\gamma < 1$), car pour $\gamma < 1$ elle est de la classe $H_Z^\infty(1, \gamma)$. De même la fonction dont les coefficients sont définis par (3) ($\beta = 0$, $\alpha = 2$) appartient simultanément à la classe $H(0, -1)$ et à $H_Z^\infty(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. Elle n'appartient donc à aucune des classes $H(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. La méthode donne en deuxième cas ($\beta = 0$, $\alpha > 1$) la localisation de la fonction $f(x)$ non complète.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. de Vito, Su un esempio di funzione continua senza derivata. *Enseignement mathématique*, IV (1958), pp. 281-283.
2. G. de Rahm, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
3. J.-P. Kahane, Sur l'exemple, donné par M. de Rahm, d'une fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, V (1960), pp. 53-57.
4. E. Tarnawski, Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.