INTRODUCTION

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

INTRODUCTION

Les questions de maxima et de minima jouent un tel rôle en mathématiques que mon attention a toujours été attirée vers elles. Mes premières recherches sur la longueur des courbes et l'aire des surfaces m'ont fait considérer ces notions comme liées à des problèmes de minimum. Les procédés que j'employais alors étant apparentés à ceux grâce auxquels M. Hilbert fondait la méthode directe du calcul des variations, c'est toujours en pensant quelque peu à cette méthode que je me suis occupé de maximum et de minimum, de sorte que des glanes faites dans mes publications, mes notes de cours ou mes souvenirs relatifs à des problèmes d'extrema constituent une sorte d'étude critique de la méthode directe; c'est sous cette forme que je les présenterai ici. La conclusion qui s'en dégagera est que cette méthode directe, loin de devoir être opposée comme on le fait quelquefois aux méthodes plus classiques n'est que le complément naturel et indispensable de ces méthodes.

La dénomination de « méthode directe » étant assez mal choisie, quelques explications sont peut-être nécessaires. Avant que les dérivées n'aient fait partie des programmes de l'enseignement moyen, la recherche d'un maximum ou d'un minimum se faisait comme il va être rappelé. Soit à trouver le minimum de $y = x^2 - 3x + 2$. Les valeurs de y sont celles pour lesquelles l'équation précédente, considérée comme équation en x, a des racines; donc ces valeurs de y vérifient l'inégalité

$$3^2 - 4(2 - y) \geqq 0 .$$

Ainsi le minimum de y est $-\frac{1}{4}$ et il est atteint pour $x = \frac{3}{2}$. Soit encore à trouver les extrema de

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} .$$

Les valeurs de y atteintes s'obtiennent comme précédemment.

Elles vérifient l'inégalité

$$3^2 - 4(2+9y)(1-y) \geqq 0$$

ou

$$1 - 28y + 36y^2 \geqq 0$$

$$\text{soit } y \geqslant \frac{7+2\sqrt{10}}{18}, \text{ soit } y \leqq \frac{7-2\sqrt{10}}{18}.$$

Cette fonction n'a donc ni maximum absolu ni minimum absolu, mais elle a un maximum relatif et un minimum relatif dont nous venons de trouver les valeurs et qui sont obtenues pour $x = \frac{3}{2(1-y)}$.

Pour distinguer cette ancienne méthode de la méthode actuelle qui utilise les dérivées, celle-ci a été parfois appelée méthode directe. Dénomination étrange, puisque l'ancienne méthode fournissait d'abord y et ensuite x, c'est-à-dire en premier lieu l'extremum cherché, tandis que la nouvelle fournit d'abord x et ensuite y, c'est-à-dire en premier lieu ce qu'on appelle la *valeur extrémale*. Cette dénomination est d'autant plus surprenante que, dans la pratique, c'est l'extremum qui est important. Ce qu'il importe de savoir, par exemple, c'est quelle est la plus grande charge que peut supporter un pont et il est beaucoup moins essentiel de savoir quelle position atteindrait une voiture trop chargée avant que le pont ne se rompe. L'ancienne méthode présente donc un avantage évident sur la nouvelle. Mais elle a le grave inconvénient de ne pouvoir être employée que dans un très petit nombre de cas, ceux où l'on sait résoudre les équations analogues à celles qui nous ont servi ou, tout au moins, trouver le nombre de leurs racines et les valeurs approximatives de ces racines. Comme on ne sait guère résoudre ces équations auxiliaires que par l'emploi des dérivées, on se trouve ramené, à la forme d'exposition près, à la méthode nouvelle.

Malgré ces critiques, nous appellerons *méthode directe* une méthode dans laquelle l'extremum n'est pas obtenu en premier lieu.

Les questions dont nous nous occuperons sont du type suivant : un élément X est variable dans une certaine famille d'éléments ; ce sera, suivant les cas, un nombre, un point (d'une droite, d'une courbe, d'un plan, de l'espace, ..., c'est-à-dire une variable ou un ensemble de deux ou de plus de deux variables), une courbe (du plan ou de l'espace, c'est-à-dire une fonction d'une variable ou l'ensemble de deux fonctions d'une variable), une ou plusieurs surfaces, etc... On suppose établie une correspondance entre un nombre Y et l'élément X. Cette correspondance définit ce que l'on appelle une fonction de X: $Y = F(X)$. La plus grande des valeurs atteintes par Y est son *maximum*, la plus petite son *minimum*; ce sont là les deux *extrema* de Y. Si l'on suppose qu'ils sont atteints respectivement pour les éléments X_1 et X_2, X_1 et X_2 sont les *positions extrémales* de X. Ce sont toujours les positions extrémales que nous déterminons en premier lieu.