Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre VI La méthode directe du Calcul des Variations
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Chapitre VI

La méthode directe du Calcul des Variations

Bien qu'une très faible partie des ressources que fournit la méthode classique du Calcul des Variations ait seule été exposée dans ce qui précède, on a dû comprendre que ces ressources sont bien, comme je l'ai dit, aussi importantes que celles données par les dérivées dans les problèmes de minimum ordinaire. En même temps, on a pu noter que la lacune logique de ces deux méthodes (qu'on peut appeler dans l'un ou l'autre cas: méthodes des dérivées) est la même: la méthode des dérivées détermine, totalement ou partiellement, l'élément qui peut être minimisant, mais ne prouve pas que cet élément donne effectivement un minimum; la méthode suppose donc acquise à l'avance la preuve que l'extremum envisagé est atteint. Or la méthode directe se propose précisément de construire immédiatement l'élément minimisant, laissant au besoin à plus tard le soin de bien préciser sa détermination. Il semble donc que la réunion des deux méthodes forme un tout logiquement complet. Les choses sont malheureusement moins simples, comme on le verra. Pourtant la méthode directe vient heureusement au secours de la méthode classique.

Il a déjà été parlé des origines lointaines de cette méthode directe. Pour qu'elle prenne une forme précise, il ne faut pas cependant remonter plus haut que les objections faites par Weierstrass à la théorie des fonctions abéliennes de Riemann. Celui-ci s'appuyait sur la solution de ce problème de minimum connu sous le nom de problème de Dirichlet. Il admettait que le minimum est atteint, comme l'avait fait, avant lui, Dirichlet et Gauss. Weierstrass, à cette occasion, introduisit la distinction dont nous avons parlé entre borne inférieure et minimum, et bien qu'il s'agisse là d'un problème du Calcul des Variations, ce lui fut l'occasion de créer la méthode directe, non pour ce calcul,

mais pour les problèmes de minimum ordinaire. Cette méthode, qui nous a déjà quelque peu servi, peut être précisée comme il suit.

Soit une fonction $F(P)$ dépendant d'un point P. Pour en trouver le minimum, on considère une suite de points P_1, P_2, etc... telle que $F(P_1)$, $F(P_2)$ etc... tendent vers la borne inférieure des valeurs que puisse prendre $F(P)$ (suite minimisante). On considère un point P_0, limite des points de la suite. La valeur $F(P_0)$ si F est continue en P_0 est bien la borne inférieure considérée, et par suite le minimum est atteint pour la position P_0 de P.

La méthode directe pour le Calcul des Variations repose sur un principe correspondant exactement à celui qui vient d'être indiqué. Soit une quantité $F(P)$, P étant maintenant une fonction d'une ou plusieurs variables, ou même un ensemble de fonctions. F est appelée une fonctionnelle d'après une dénomination due à M. Hadamard. On considère une suite de fonctions P_1, P_2, etc... telle que $F(P_1)$, $F(P_2)$ etc... tendent vers la borne inférieure des valeurs que prend la fonctionnelle F (suite minimisante). On prend une fonction P_0 limite des fonctions P_1, P_2, etc... La valeur $F(P_0)$ moyennant une certaine continuité de F en P_0 est bien la borne inférieure considérée, donc le minimum est atteint pour la détermination P_0 de P.

Cette méthode a tout d'abord été indiquée par Arzela dans une note fort remarquable et qui néanmoins passa inaperçue au point que, quand M. Hilbert retrouvant le principe de la méthode directe l'exposa au Congrès de Zurich en 1897, il ne fit en quelque sorte que reproduire la note d'Arzela qu'il ignorait, alors que, possédant des résultats très personnels et profonds sur le problème de Dirichlet, il aurait pu la prolonger. Ce n'est que quelques années plus tard, quand Arzela se décida à signaler modestement à quelques amis sa priorité, que justice put lui être rendue. C'est donc à Arzela et à M. Hilbert qu'il convient de faire remonter la méthode directe du Calcul des Variations. Encore n'est-ce qu'à partir des travaux d'Hilbert, lesquels eurent immédiatement un retentissement considérable, que l'on se mit à étudier comme il le méritait ce procédé nouveau.

Il exige que l'on effectue certaines opérations dont nous allons examiner la possibilité. Il faut d'abord prendre une suite mini-

misante P_1, P_2, etc... Une telle suite existe toujours. Il faut ensuite considérer un élément-limite P_0 de cette suite. Or existe-t-il un tel élément-limite ? La proposition connue sous le nom de théorème de Bolzano Weierstrass prouve l'existence de P_0 lorsque les P sont des points situés dans une partie bornée de l'espace. Donc la considération de P_0 ne présente pas de difficulté quand il s'agit d'une fonction de points pourvu qu'on ne l'envisage que dans une région bornée. Au contraire, s'il s'agit d'une fonctionnelle, si donc les P désignent des fonctions, une suite infinie de fonctions même bornée dans son ensemble n'a pas nécessairement une fonction-limite. Il en est ainsi par exemple pour $P_n = \sin nx$. Un travail d'Ascoli fournit cependant un résultat à rapprocher du théorème de Bolzano-Weierstrass. On appelle fonctions également continues, par exemple dans le cas d'une variable t, les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, etc... qui, quel que soit ε positif, admettent un η tel que l'on ait

$$|f_i(t+h) - f_i(t)| < \varepsilon$$

dès que l'on a $|h| < \eta$, η étant indépendant de i. Le théorème d'Ascoli s'énonce ainsi: une suite de fonctions également continues et bornées dans leur ensemble admet une fonction-limite. En effet, prenons des valeurs de t en infinité dénombrable et réparties dans tout l'intervalle borné que l'on considère. Soient t_1, t_2 etc... ces valeurs. Parmi les f_i, choisissons une suite partielle f_j' telle que les f_j' de t_1 convergent, ce qui est possible puisqu'il s'agit de fonctions bornées dans leur ensemble. Dans la suite des f_j', prenons une suite partielle f_k'' telle que les f_k'' de t_2 convergent, etc... et prenons enfin la suite f_1, f_1', f_1'' etc... Il est clair que cette suite converge pour chacun des t_n. Or, soit maintenant une valeur θ de t et prenons un intervalle $\theta-\eta$, $\theta+\eta$, η étant le nombre correspondant à un ε choisi. Les nombres $f(\theta)$, $f_1'(\theta)$, etc... diffèrent de moins de ε de la limite de la suite f_1, f_1', etc... pour la valeur t_n, cette valeur t_n étant comprise dans l'intervalle $\theta-\eta$, $\theta+\eta$. Or nous pouvons prendre ε aussi petit que nous voulons, donc la suite $f_1(\theta)$, $f_1'(\theta)$, etc... converge, et vers une valeur qui diffère de la limite obtenue pour t_n de moins de ε. Donc le théorème d'Ascoli est démontré et l'on voit que la fonc-

tion-limite fait partie de la même famille de fonctions également continues que les fonctions de départ. En particulier, si l'on a affaire à une suite de courbes situées dans une région bornée de l'espace et toutes de longueur au plus égale à un nombre fini S, il suffit de prendre pour paramètre de représentation l'arc s pour que les fonctions définissant la courbe soient également continues et que par suite l'application du théorème d'Ascoli montre que ces courbes ont une courbe-limite de longueur d'ailleurs au plus égale à S. Ainsi, dans le Calcul des Variations, pourvu qu'on introduise les restrictions nécessaires pour être dans le cas d'égale continuité, l'élément-limite P_0 existe et jusqu'ici il n'y a donc pas de différence essentielle entre les deux sortes de problèmes de minimum envisagés.

Il faut ensuite se servir d'une condition de continuité qui doit être remplie en P_0 pour en déduire que $F(P_0)$ est bien la valeur du minimum. Comme sur P_0, on ne connaît rien d'autre que son existence, il faudra naturellement supposer que la condition de continuité en question est remplie pour chaque choix possible de P. S'il s'agit d'une fonction de points $F(P)$ dans les problèmes de minimum qu'on se propose, F est toujours supposée continue partout et par suite il n'y a aucune difficulté. Mais dans le cas de fonctionnelles, la continuité de la fonctionnelle $F(P)$ est tout-à-fait exceptionnelle, les plus simples exemples le montrent. Ainsi la longueur d'une courbe n'est nullement la limite des longueurs des courbes infiniment voisines. Ceci pourtant n'avait arrêté ni Arzela ni Hilbert, car les propriétés des longueurs sont connues et simples et l'on pouvait, sans invoquer une continuité, conclure que, cherchant le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface, la méthode d'Ascoli permettait bien de l'obtenir. Mais, pour les cas un peu plus généraux, il fallait avoir recours à une continuité, laquelle, nous venons de le dire, n'existe pas.

Dans ma thèse (Intégrale-Longueur-Aire; *Annali di Matematica*, 1902), j'ai envisagé une sorte de continuité qui permet de conclure dans bien des cas. Baire avait décomposé la notion de continuité des fonctions d'une variable en deux notions distinctes qu'il appelait semi-continuité inférieure et supérieure. Je n'ai eu qu'à étendre ces notions aux fonctionnelles et, tandis que,

réduites à leur utilisation dans le cas des fonctions de points, elles n'avaient guère qu'un intérêt philosophique, elles se sont révélées d'importance capitale pour la méthode directe.

On dit qu'une fonctionnelle $F(P)$ est semi-continue inférieurement si la plus petite des limites des $F(P)$ quand P tend vers une détermination Π est au plus égale à $F(\Pi)$. Il est clair que, si une fonctionnelle $F(P)$ est semi-continue inférieurement et si P_0 est l'élément limite obtenu précédemment, $F(P_0)$ sera bien égal au minimum. On définit d'une façon analogue la semi-continuité supérieure; elle permet de conclure qu'un maximum est atteint. Dans ma thèse, je me suis borné à ce genre d'indications sans rechercher des cas où une telle semi-continuité existait effectivement, car mon but n'était pas du tout l'étude du Calcul des Variations et je n'en parlais que dans la mesure où cela m'était immédiatement utile. Goursat, puis M. Hadamard montrèrent que la semi-continuité existait dans des cas étendus, puis M. Léonida Tonelli montra que la semi-continuité nécessaire à l'emploi de la méthode directe était réalisée pour tous les problèmes que l'on appelle réguliers, et il réussit à donner une méthode complète pour la résolution du premier problème du Calcul des Variations. C'est là un progrès très important et c'est précisément parce que j'apprécie à un très haut point ces résultats de M. Tonelli que je me suis permis de rappeler la toute petite part qui me revient dans ces progrès: avoir étendu aux fonctionnelles les notions de semi-continuité; ce que plusieurs ouvrages récents attribuent à M. Tonelli. On peut d'ailleurs me rendre justice sans crainte; l'apport de M. Tonelli est si grand qu'il ne sera diminué en rien.

Je voudrais maintenant montrer que ces notions de semi-continuité obtenues par Baire grâce à son esprit profondément critique dans le cas des fonctions de points sont des notions simples et qui vraiment s'imposent dans le cas des fonctionnelles.

Tous mes travaux se rattachent à une plaisanterie de collégien. Au Collège de Beauvais, nous démontrions que, dans un triangle, un côté est égal à la somme des deux autres. Soit ABC un triangle. Si A_1, B_1, C_1 sont les milieux de ses côtés, on a

$$BA + AC = BC_1 + C_1 A_1 + A_1 B_1 + B_1 C.$$

Opérons sur chacun des triangles BC_1A_1, A_1B_1C comme sur ABC. On trouve une ligne brisée formée de huit segments et égale à $BA+AC$. En continuant ainsi, on a une suite de lignes brisées qui s'écartent de moins en moins du côté BC et qui ont toujours pour longueur la somme des deux autres côtés de notre triangle de départ. Les collégiens de Beauvais en concluaient que le segment BC, limite géométrique de nos lignes brisées, avait pour longueur la somme des deux autres côtés, $BA+AC$. Mes camarades ne voyaient là qu'une bonne plaisanterie. Pour moi, ce raisonnement m'a paru extrêmement troublant, car je ne voyais aucune différence entre lui et les démonstrations relatives aux aires et surfaces des cylindres, cônes, sphères, ou à la longueur de la circonférence. Je finis par me contenter d'observer que, pour cette dernière longueur, on pouvait se servir de polygones inscrits et, lorsqu'on en utilisait d'autres, c'étaient des polygones voisins de ceux-ci et ne présentant nullement les complications accumulées à souhait dans les lignes brisées de notre pseudo-démonstration. Pour les cylindres, cônes et sphères, on avait aussi recours ou l'on pouvait si on le désirait avoir recours à des polyèdres quelque peu inscrits dans les surfaces considérées. Plus tard, je sus démontrer que les polygones inscrits dans une courbe ont effectivement une limite et que cette limite est la longueur de la courbe. J'imaginais bien entendu que l'aire d'une surface pouvait se définir de la même manière quand, en première année d'Ecole Normale, j'appris, par la lettre de Schwarz à Genocchi insérée dans le cours lithographié d'Hermite, que l'aire des polyèdres inscrits dans une surface n'a pas une limite déterminée et que le problème de la définition de l'aire était en somme un problème ouvert. Pour le résoudre, il fallait tout d'abord abandonner l'idée d'utiliser des éléments inscrits, ce qui paraissait bien regrettable puisqu'ils donnaient une définition logique parfaite de la longueur des courbes. Mais il y avait une raison péremptoire pour considérer que cette définition logiquement parfaite était cependant mauvaise à certains égards: c'est qu'une longueur se mesure pratiquement; s'il fallait pour l'avoir prendre nécessairement des points sur la courbe comme sommets des polygones utilisés, la mesure physique serait impossible puisqu'on ne peut distinguer un point d'un point extrême-

ment voisin. Si l'on réfléchit d'ailleurs à la façon dont on s'y prend pour mesurer une courbe, par exemple un chemin avec un mètre à ruban, on en revient à ce que nous avons déjà dit, qu'il s'agit avant tout de supprimer les complications inutiles, en somme de prendre les polygones qui donnent la plus petite valeur possible comme valeur-limite. Si de plus on observe que, par la construction de lignes en dents de scie, il est possible de remplacer les polygones fournissant une certaine limite par d'autres fournissant une limite supérieure choisie à volonté, on voit que la limite inférieure dont nous parlons est vraiment le seul nombre fourni par l'ensemble des polygones s'approchant indéfiniment d'une courbe donnée.

D'où les deux définitions que j'ai posées:

La longueur d'une courbe est la plus petite des limites des longueurs des polygones tendant uniformément vers la courbe.

L'aire d'une surface est la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant uniformément vers la surface.

On voit que ces deux définitions mettent en évidence la semi-continuité inférieure de la longueur et de l'aire. Ce n'est pas par l'introduction de restrictions que la longueur et l'aire sont semi-continues. Leur définition même est basée sur la semi-continuité et l'entraîne.

La méthode directe a donc pour point de départ la distinction élémentaire entre borne inférieure et minimum; elle fait usage d'un procédé de construction simple et qu'on peut dire naturel; elle s'appuie enfin sur une notion de continuité très élémentaire également et qui, à certains égards, s'impose à l'esprit. Il ne faudrait pas croire cependant que, parce qu'il s'agit de considérations n'exigeant presque aucune connaissance mathématique préalable, les principes de la méthode directe sont de ceux qu'on n'oublie pas une fois qu'on les a employés. Par exemple, j'ai eu l'occasion dans l'article qui va être reproduit de montrer que ceux-là même qui avaient attiré l'attention sur la distinction entre borne inférieure et minimum confondaient cependant ces notions dès qu'elles se présentaient sous un aspect un peu nouveau.[1])

1) Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur la méthode de Carl Neumann, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9e série, t. XVI, 1937, pp. 205-217 et 421-423.

On sait qu'au début de ses recherches sur les fonctions abéliennes, Riemann résout le problème de Dirichlet par une méthode fautive, car elle suppose que toute quantité variable atteint sa borne inférieure; *il confond borne inférieure et minimum.*

Weierstrass releva la faute. A Weierstrass nous devons la démonstration du fait que toute fonction continue de variables atteint sa borne inférieure et les célèbres conditions suffisantes pour le calcul des variations. Mais le problème de Dirichlet n'était pas résolu par ces recherches; l'existence d'intégrales de première espèce pour une surface de Riemann quelconque, que Riemann avait déduite du problème de Dirichlet, restait en question.

Carl Neumann s'est occupé avec succès de ces questions; il a notamment donné pour la résolution du problème de Dirichlet une méthode restée justement célèbre; Neumann se bornait à l'étude des domaines convexes, Poincaré a justifié la méthode pour des cas étendus de domaines non convexes; les recherches de Fredholm ont fait mieux comprendre encore l'importance de cette méthode et les raisons de son succès. La critique que j'en veux faire ici ne portera que sur sa légitimation classique pour le cas des domaines convexes.

Celle-ci repose en effet sur un lemme géométrique dont la prétendue démonstration donnée est basée uniquement sur la même confusion entre borne inférieure et minimum. Cette faute est de Neumann; mais elle est aussi celle des Auteurs qui opposent Riemann et Neumann; celle des professeurs qui ont exposé le raisonnement de Neumann et de tous ceux qui ont lu ce raisonnement sans protester. Bref, nous avons tous fait cette faute; aussi mérite-t-elle qu'on s'arrête un instant pour l'examiner.

Sans doute, maintenant qu'est faite la distinction entre borne inférieure et minimum, il n'y a plus guère de profit mathématique précis à tirer de cet examen; mais il y a un profit certain, quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus.

Il s'agit bien d'une erreur ancienne; quelque cinquante ans avant l'objection de Weierstrass, Servois opposait la même objection à Argand.

Plus anciennement encore, on avait compris qu'il fallait distinguer quand on étudie la convergence d'une série, entre

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1;$$

et, comme la quantité à majorer dans le raisonnement de Neumann est précisément le rapport de deux termes consécutifs d'une série, c'est cette faute de débutant que nous ne reconnaissons pas.

Le lemme est d'ailleurs facile à démontrer rigoureusement en s'aidant de la méthode directe du calcul des variations et de calculs qui remontent à Neumann lui-même. On le démontre ici pour tous les domaines convexes non biétoilés; condition restrictive essentielle pour l'exactitude du lemme, sous quelque forme qu'on l'énonce.

Un *autre* lemme, *nettement différent*, nous permettra d'ailleurs de légitimer les développements en série de Neumann pour tous les domaines convexes, sans aucune espèce de restriction.

1. La méthode de Carl Neuman pour la résolution du problème de Dirichlet est basée, comme l'on sait, sur les propriétés des potentiels de double couche: on recherche la densité $\delta(s)$ d'une double couche répartie sur la frontière F du domaine donné et dont le potentiel se réduise sur cette frontière du côté intérieur au domaine, à la fonction donnée $f(x)$. Ceci conduit à l'équation:

$$[E - A(x)]\,\delta(x) + \int_F \delta(s)\, d\theta_x^s = f(x)$$

dans laquelle x et s désignent deux points de la frontière; E, $A(x)$, θ_x^s sont les mesures, faites avec les unités trigonométriques normales, d'angles solides. Pour E, il s'agit de tout l'espace; pour $A(x)$, de l'angle sous lequel on voit le domaine, supposé convexe, du point x; pour θ_x^s, de l'angle sous lequel, de x, on voit un domaine découpé sur la frontière et parcouru par le point s.

L'intégrale est ce qu'on appelle maintenant une intégrale de Stieltjes.

Sous cette forme, l'équation convient aux domaines convexes les plus généraux; mais cela suppose qu'on a étudié les propriétés des doubles couches réparties sur la frontière de tels domaines; je ne m'y arrêterai pas car mes observations s'appliquent tout aussi bien aux domaines les plus simples, à un polygone et tout spécialement à un quadrilatère. On pourra donc supposer qu'on est dans le plan, interpréter x et s comme des paramètres; E sera 2π, $A(x)$ l'angle du contour F au point x et, si l'on suppose que F n'a qu'un nombre fini de points singuliers, comme le faisait Neumann, l'intégrale se transformera en une intégrale ordinaire; mais on pourra aussi, au contraire, conserver aux symboles leur portée générale.

Pour résoudre l'équation du problème, Neumann l'écrit sous la forme équivalente

$$f(x) = E\delta(x) + \int_F [\delta(s) - \delta(x)]\, d\theta_x^s,$$

et, par approximations successives, il trouve

$$\delta(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + \ldots$$

avec

$$v_0(x) = \frac{f(x)}{E}, \quad v_i(x) = -\frac{1}{E}\int_F [v_{i-1}(s) - v_{i-1}(x)]\, d\theta_x^s.$$

Un calcul facile montre que, si la série $\delta(x)$ est majorée par une série convergente de constantes positives, la fonction $\delta(x)$ vérifie bien l'équation et conduit à la solution du problème de Dirichlet. Pour obtenir cette série majorante supposons que, sur tout F, on ait

$$m_i \leqq v_i(s) \leqq M_i$$

et partageons F en deux parties A_i et B_i lieux des points s tels que:

pour A_i $$\frac{M_{i-1} + m_{i-1}}{2} \leqq v_{i-1}(s) \leqq M_{i-1}$$

pour B_i $$m_{i-1} \leqq v_{i-1}(s) < \frac{M_{i-1}+m_{i-1}}{2}.$$

D'où, pour $v_{i-1}(s) - v_{i-1}(x)$, respectivement les limites,

pour s dans A_i $$-\frac{M_{i-1}-m_{i-1}}{2}(M_{i-1}-m_{i-1}),$$

pour s dans B_i $$-(M_{i-1}-m_{i-1})\frac{M_{i-1}-m_{i-1}}{2};$$

et, par suite,

$$\frac{M_{i-1}-m_{i-1}}{E}\left[\int_{A_i} d\theta_x^s + \frac{1}{2}\int_{B_i} d\theta_x^s\right] \leqq v_i(x)$$
$$\leqq \frac{M_{i-1}-m_{i-1}}{E}\left[\frac{1}{2}\int_{A_i} d\theta_x^s + \int_{B_i} d\theta_x^s\right].$$

Si donc on prend pour m_i et M_i les bornes exactes de v_i, la différence $M_i - m_i$ qui sera la borne supérieure de $v_i(x) - v_i(y)$, est telle que

$$M_i - m_i \leqq (M_{i-1} - m_{i-1})\,\Lambda,$$

Λ étant la borne supérieure de

$$\Lambda(x, y, A_i, B_i) = \frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2}\int_{A_i} d\theta_x^s + \int_{B_i} d\theta_x^s + \int_{A_i} d\theta_y^s + \frac{1}{2}\int_{B_i} d\theta_y^s\right\};$$

cette borne supérieure étant relative à tous les choix possibles de x et de y sur F et à tous les partages possibles de F en deux ensembles complémentaires A_i, B_i [1]). D'où $M_i - m_i < k\,\Lambda^i$, avec une valeur convenable de k, et, puisque $\int_F d\theta_x^s$ ne peut surpasser E,

$$|\,v_i(x)\,| < k\,\Lambda^{i-1}.$$

Si donc Λ est inférieur à 1, la solution est obtenue.

---

[1]) On pourrait assujettir A_i à être fermé, donc B_i à être ouvert, et à contenir tous deux des domaines, mais, en réalité, il suffit que A_i, donc B_i, soit mesurable afin que les intégrales considérées existent.

2. C'est ici qu'intervient le lemme géométrique dont j'ai parlé; on l'énonce sous des formes diverses. Les intégrales qui figurent dans la définition de Λ sont les angles $A_{i,x}$; $B_{i,x}$; $A_{i,y}$; $B_{i,y}$ sous lesquels les parties A_i et B_i sont vues des points x et y; de sorte que l'on a, par exemple,

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, A_i, B_i) &= \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}A_{i,x}+B_{i,x}+A_{i,y}+\frac{1}{2}B_{i,y}\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[(A_{i,x}+B_{i,x})+(A_{i,y}+B_{i,y})-\frac{1}{2}(A_{i,x}+B_{i,y})\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(A_{i,x}+B_{i,x})+\frac{1}{2}(A_{i,y}+B_{i,y})+\frac{1}{2}(A_{i,y}+B_{i,x})\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[(A_{i,x}+B_{i,x})+\frac{1}{2}(A_{i,y}+B_{i,y})+\frac{1}{2}(A_{i,y}-A_{i,x})\right].
\end{aligned}$$

En remarquant que les parenthèses $(A_{i,x}+B_{i,x})$, $(A_{i,y}+B_{i,y})$ sont au plus égales à $\frac{E}{2}$, à ces expressions de Λ correspondent les formes suivantes du lemme:

Il existe un nombre q, *indépendant du choix des deux points* x *et* y *sur la frontière* F *et de la division de* F *en deux parties* A_i *et* B_i *tel que l'on ait*

(Forme I) $\quad \frac{1}{2}A_{i,x}+B_{i,x}+A_{i,y}+\frac{1}{2}B_{i,y} \leqq qE \quad$ avec $\quad q<1;$

(Forme II) $\quad A_{i,x}+B_{i,y} \geqq qE, \quad$ avec $\quad q>0;$

(Forme III) $\quad A_{i,x}+B_{i,y} \leqq qE, \quad$ avec $\quad q<1;$

(Forme IV) $\quad A_{i,y}-A_{i,x} \leqq qE, \quad$ avec $\quad q<\frac{1}{2}.$

La forme II se démontre généralement en disant: $A_{i,x}$ ne peut être nul que si x est le sommet d'une partie conique de F à laquelle A_i appartient; en d'autres termes si A_i est un lieu de segments de droites passant toutes par x, $B_{i,y}$ ne s'annule

que dans des conditions analogues. *Donc la forme* II *est justifiée pour tous les domaines non biétoilés*, c'est-à-dire tels que F ne soit pas formée de deux parties coniques.

De la forme II la forme III résulte de suite, puisque l'on a

$$A_{i,\,x} + A_{i,\,y} + B_{i,\,x} + B_{i,\,y} \leqq E;$$

cette forme III est celle que Neumann formule dans son énoncé. On pourrait certes l'atteindre directement sans passer par II, mais c'est par le détour employé ici que Neumann y arrive.

Il est clair que le raisonnement rappelé est inopérant; du fait que

$$\zeta = (A_{i,\,x} + B_{i,\,y}) \times \frac{1}{E}$$

est inférieur à 1 pour tout choix de la division A_i, B_i et des points x, y il n'en résulte nullement que sa borne supérieure λ soit aussi inférieure à 1. On ne peut l'affirmer que si l'on a prouvé que la borne supérieure est aussi un maximum, c'est-à-dire est elle-même atteinte pour un choix des A_i, B_i, x, y. *Le raisonnement de Neumann, destiné à remplacer celui de Riemann, est donc fondé exactement sur la même confusion entre borne supérieure et maximum, justement critiquée par Weierstrass.*

Il est tout à fait étonnant que tout le monde, à commencer par Weierstrass, ait admis la validité du raisonnement de Neumann et que nos traités actuels continuent à opposer le raisonnement de Riemann, déclaré faux, à celui de Neumann, proclamé entièrement correct. Et pourtant Neumann attirait l'attention sur le point litigieux dans l'énoncé même de son lemme *Hauptsache;* c'est, en effet, dans l'énoncé qu'il passe du fait, exact, démontré sur ζ à la conclusion fausse relative à la borne supérieure λ de ζ. Il le fait en utilisant la notation *(sic !)* qui ne peut manquer d'attirer l'attention, dans les termes suivants [1]):

« ..., so wird ζ dem spielraum unterworfen sein:

$$o \leqq \zeta < 1$$

(sic !)

---

1) *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, par C. NEUMANN, Leipzig, Teubner, 1877, p. 173.

Was von der Variablen ζ gilt, gilt aber nothwendig auch von jedem specialwerth dieser Variablen. Bezeichnet man also den Maximalwerth von ζ mit λ, so folgt aus der vorstehenden Formel sofort:

$$o \leqq \zeta \leqq \lambda < 1 \text{ ».}$$

(sic !)

Ainsi Neumann, ayant à majorer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, fait exactement la faute des élèves qui ne distinguent pas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{de} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1;$$

mais il la fait, si je puis dire, d'une façon plus savante, en affirmant que la maximalwerth de ζ est une specialwerth de ζ, c'est-à-dire exactement sous la même forme que Riemann.

3. On ne saurait mettre la confusion qu'il a commise en plus parfaite lumière qu'il ne l'a fait lui-même, mais, si la lacune de la démonstration est claire, comme nous justifirons dans un instant le lemme de Neumann, avec l'énoncé de Neumann et en nous restreignant comme lui au cas des domaines non biétoilés, il ne sera pas superflu d'indiquer que, dans cette question du lemme de Neumann, le raisonnement faux de Neumann n'a pas conduit seulement à des résultats exacts mais aussi à des énoncés erronés.

Dans un ouvrage excellent, l'Auteur adopte la forme IV et, raisonnant comme Neumann, il dit: $A_{i,y} - A_{i,x}$ ne peut être égal à $\frac{E}{2}$ que pour $A_{i,y} = \frac{E}{2}$, $A_{i,x} = 0$ et ceci exige que le domaine soit limité par une partie conique A_i et une variété linéaire B_i, on prendra x au sommet du cône, y dans B_i. Ainsi, *il ne sera donc plus nécessaire d'écarter que ces domaines pyramidaux et non tous les domaines biétoilés.*

On notera que c'est bien le seul raisonnement de Neumann qui a été employé, qu'aucune faute nouvelle n'a été surajoutée à celle de Neumann, c'est-à-dire à celle que nous commettons tous quand nous acquiesçons au raisonnement de Neumann, et pourtant, cette fois, la conclusion est fausse; car:

Le lemme de Neumann est faux pour tout domaine biétoilé quelle que soit celle des formes I *à* IV *sous laquelle on l'énonce.*

Pour montrer cela il suffira de s'occuper de la forme I puisque les autres ont été obtenues par des majorations des intégrales servant à la définition de Λ. Plaçons-nous d'abord dans le cas du plan, un domaine biétoilé est un quadrilatère, $ABCD$, exceptionnellement un triangle ABC, on placerait alors D sur le côté AC. ε_i étant arbitrairement petit positif, prenons des voisinages de A et de C, tels, pour celui de A, par exemple, que pour chaque point ξ de ce voisinage, les angles BAD, $B\xi D$ diffèrent de moins de ε_i; prenons ξ dans le voisinage de A et sur AB et faisons subir à l'angle $D\xi B$ une translation dans laquelle ξ se rapproche de A sur BA, arrêtons-nous dans une position telle que la partie du côté AD extérieure à cet angle soit vue du voisinage de C sous un angle inférieur à ε_i; soient alors x_i la position de ξ, $D\alpha_i$ la partie de DA extérieure à l'angle. De façon analogue nous prendrons η, puis y_i sur CB et $D\gamma_i$ sur DC. B_i sera formée de $A\alpha_i$, $D\gamma_i$, BC; A_i sera formée de $C\gamma_i$, $D\alpha_i$, AB. On a:

$$A_{i,\,y_i} > \pi - 2\varepsilon_i, \qquad B_{i,\,y_i} > \pi - 2\varepsilon_i,$$

$$A_{i,\,x_i} + B_{i,\,x_i} = \pi, \qquad A_{i,\,y_i} + B_{i,\,y_i} = \pi;$$

donc, pour ε_i tendant vers zéro,

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}A_{i,\,x_i} + B_{i,\,x_i} + A_{i,\,y_i} + \frac{1}{2}B_{i,\,y_i}\right\}$$

tend vers 1.

Dans le cas d'un domaine biétoilé à plus de deux dimensions, on opérera exactement de même. La frontière F pourra toujours être considérée comme formée de deux partie coniques $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$ de sommets A et C se coupant suivant une certaine variété BD; sur $\mathscr{A}$ on choisira une génératrice le long de laquelle il existe un élément tangent et sur cette génératrice un point ξ dans un certain voisinage de A d'où l'on voit la variété BD sous un angle solide différant de moins de ε_i de celui sous lequel elle est vue de A, et l'on fera subir au cône (ξ, BD) la translation rectiligne qui amènerait ξ en A en s'arrêtant quand la partie de $\mathscr{A}$ exté-

rieure à ce cône est vue du voisinage de $\mathscr{C}$ sous un angle solide inférieur à ε_i, ...

Ainsi, on ne peut étendre le lemme de Neumann au-delà du cas considéré par Neumann; il est vain d'espérer atteindre de cette façon des domaines biétoilés.

Il est tout à fait surprenant que Neumann se soit juste arrêté à point. J'ai déjà indiqué que Neumann, bien que concluant pour la forme III, avait en réalité raisonné sur la forme II; s'il avait raisonné directement sur III, il aurait dit: $A_{i,x} = \frac{E}{2}$ seulement quand il y a un élément tangent en x et que B_i est tout entier dans cet élément tangent. La même chose peut se répéter après permutation de A_i, B_i, de x, y; or les conditions indiquées dans les deux cas sont incompatibles, donc:

$$\underset{\text{(sic !)}}{A_{i,x}+B_{i,y} < E} \qquad \text{d'où} \qquad \underset{\text{(sic !)}}{A_{i,x}+B_{i,y} \leqq qE < E;}$$

et, comme conclusion, la forme III du lemme *pour tous les domaines convexes sans aucune exception;* ce qui serait erroné.

D'ailleurs, des considérations mêmes de Neumann on pourrait tirer la même conclusion, puisqu'elles donnent la première des inégalités précédentes sauf pour le cas où A_i et B_i seraient deux parties coniques de sommets respectivement y et x et qu'alors on a

$$A_{i,y} = B_{i,x} = o; \quad A_{i,x}+B_{i,x} \leqq \frac{E}{2}; \quad A_{i,y}+B_{i,y} \leqq \frac{E}{2}$$

les deux dernières égalités s'excluant l'une l'autre. Cela revient en somme à utiliser la forme I et, en effet, le mode de preuve de Neumann appliqué à I donnerait cet énoncé pour tous les domaines sans restrictions.

Bref, le mode de raisonnement employé est non seulement insuffisant, il est erroné et conduit aussi bien à des conclusions fausses qu'à des conclusions exactes.

4. Une démonstration du lemme de Neumann ne peut reposer que sur l'évaluation approchée de la quantité, dont la borne est

en discussion, et le calcul à faire pour cela s'impose. Il a été fait par Neumann lui-même qui, après la démonstration (?) de son lemme, calcule λ pour une ellipse et un ellipsoïde, par exemple.

Neumann ne voyait pas dans ce calcul un appui pour sa démonstration dont la validité lui paraissait certaine, mais certains auteurs, qui ont introduit le commencement du calcul de Neumann dans la démonstration même du lemme, avaient peut-être quelque doute sur cette validité. Ils ne nous ont pas renseignés sur ces doutes; il est peu vraisemblable d'ailleurs qu'ils aient bien assimilé l'une à l'autre les lacunes des raisonnements de Neumann et de Riemann, sans quoi, après avoir majoré l'expression étudiée par une quantité variable V, ils n'auraient pas oublié de prendre les précautions nécessaires pour passer de V à sa borne supérieure sans donner prise à la même critique. Ces précautions sont d'ailleurs simples; V est le plus souvent une fonction ordinaire, il suffit donc de se placer dans des conditions où elle est continue, mais on aboutit ainsi à des domaines formant une famille moins vaste que celles que les exposés que j'ai vus croyaient examiner.

Quoi qu'il en soit, c'est au calcul de Neumann et à ces essais de meilleure démonstration du lemme que se rattache immédiatement la preuve qui suit. Pour lui donner une valeur pour tous les domaines convexes non biétoilés il suffit de se rappeler que, presque partout, la frontière d'un tel domaine a un élément tangent et que, dans les intégrales, il suffit de s'occuper de ces points non exceptionnels pour lesquels s'appliquent tous les calculs qui sont classiques pour le cas où la frontière a partout des éléments tangents; on pourra d'ailleurs, si on le veut, interpréter ce qui suit pour ce cas particulier.

Prenons, par exemple, la forme de Neumann, et raisonnons sur la borne supérieure de

$$\int_{A_i} d\theta^s_{x_i} + \int_{B_i} d\theta^s_{y_i}$$

pour tous les choix possibles de x_i, y_i, A_i, B_i. Nous pouvons, c'est le point de départ même de la méthode directe, ne conserver que des choix pour lesquels les x_i d'une part, les y_i d'autre part, ont des points limites, ξ, η qui, d'ailleurs, sont peut-être confondus.

Puisque le domaine n'est pas biétoilé, il existe un point M de F en lequel F a un élément tangent lequel ne passe ni par ξ, ni par η. Alors si autour de ξ et η on a pris des voisinages assez petits $V(\xi)$ et $V(\eta)$, autour de M on peut prendre un voisinage $V(M)$ tel que tout élément $\overline{m}$ tangent à F en un point m de $V(M)$ ne coupe ni $V(\xi)$, ni $V(\eta)$. Prenons x et y respectivement dans $V(\xi)$ et $V(\eta)$; les égalités classiques

$$d\theta_x^m \, mx \sin(mx, \overline{m}) = d\theta_y^m \, my \sin(my, \overline{m}) = d\theta_o^m \, m0 \sin(m0, \overline{m})$$

dans lesquelles 0 est un point intérieur au domaine, conservent le même sens dans le cas général, c'est-à-dire qu'elles permettent la transformation d'intégrales en $d\theta_x^m$ en intégrales en $d\,\theta_o^m$, dans lesquelles il n'y a à tenir compte que des points m pour lesquels $\overline{m}$ existe. Or, les distances et les sinus ont des bornes finies et différentes de zéro, donc, pour un certain $k > 0$, on a

$$d\theta_{x_i}^m > k d\theta_o^m, \qquad d\theta_{y_i}^m > k d\theta_o^m;$$

si l'on pose

$$v = \int_{V(M)} d\theta_o^m, \qquad v > o,$$

et, si A' et B' sont les parties de $V(M)$ qui appartiennent à A_i et B_i, on a

$$\int_{A'} d\theta_{y_i}^s > k \int_{A'} d\theta_o^s, \quad \int_{B'} d\theta_{x_i}^s > k \int_{B'} d\theta_o^s, \quad \int_{A'} d\theta_o^s + \int_{B'} d\theta_o^s = v.$$

Et puisque

$$\int_{B_i + A'} d\theta_{y_i}^s \leqq \frac{E}{2}, \qquad \int_{A_i + B'} d\theta_{x_i}^s \leqq \frac{E}{2},$$

on a

$$\int_{A_i} d\theta_{x_i}^s + \int_{B_i} d\theta_{y_i}^s < E - kv$$

le lemme de Neumann est prouvé pour tous les domaines convexes non biétoilés.

5. Le développement en série de Neumann pour la fonction densité fournissant la solution du problème de Dirichlet est donc prouvé dans les mêmes conditions. On sait que Poincaré a

montré (*Acta Mathematica*, t. XX) que ce développement s'appliquait même à des domaines non convexes sous la condition de l'existence de certaines courbures. Ici, on ne sortira pas du cas des domaines convexes, le seul pour lequel on puisse utiliser les raisonnements simples de Neumann, mais on ne fera aucune hypothèse supplémentaire. Le cas des domaines biétoilés, qui comprend celui des domaines pyramidaux, reste en réalité le seul à examiner.

On a vu (§ 1), que l'on a

$$| v_i(x) - v_i(y) | \leqq (M_{i-1} - m_{i-1}) \Lambda(x, y, A_i, B_i)$$

d'où, d'après la définition par récurrence des v_i,

$$| v_{i+1}(X) | \leqq \frac{(M_{i-1} - m_{i-1})}{E} \int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s$$

si $\Lambda(s, X)$ est la limite supérieure de $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ pour tout choix de A_i, B_i.

Supposons que l'intégrale du second membre ait qE pour borne supérieure, avec $q < \frac{1}{2}$, pour tout choix de s et X; alors de l'inégalité précédente résulterait aussi

$$| v_{i+1}(X) | \leqq q(M_{i-1} - m_{i-1}) \quad \text{et}$$

$$| v_{i+1}(X) - v_{i+1}(Y) | \leqq 2q(M_{i-1} - m_{i-1}).$$

Donc, l'oscillation de f étant $2\,\omega\, E$, on aurait successivement

$$| v_1(x) | \leqq \omega \quad | v_2(x) | \leqq \omega\,; \quad | v_3(x) | \leqq 2q\omega \quad | v_4(x) | \leqq 2q\omega\,;$$

$$| v_5(x) | \leqq (2q)^2\,\omega\,; \quad | v_6(x) | \leqq (2q)^2\,\omega\,; \ldots,$$

et il serait démontré que la série de Neumann converge encore à la façon d'une progression géométrique.

Mais il faut prouver un nouveau lemme:

Pour chaque domaine convexe l'intégrale $\int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s$ *a une borne supérieure* qE, q *étant inférieure à* $\frac{1}{2}$.

La quantité $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ ne surpassant jamais 1, il en est de même de $\Lambda(s, X)$; si donc l'on sait que $\Lambda(s, X)$ est inférieur à $\Lambda < 1$ pour les points s d'un domaine vu de X sous un angle non nul et supérieur à une limite fixe α, l'intégrale sera au plus $\frac{E}{2} - (1-\lambda)\alpha$ et la proposition sera prouvée.

Soit ξ un point limite de points X pour lesquels $\int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s$, qui est une fonction du point X, tend vers sa borne supérieure. Choisissons, ce qui est toujours possible, un point η tel que, si le domaine est biétoilé ξ et η n'en soient pas deux sommets; alors nous avons, au paragraphe précédent, considéré un point M en lequel il y avait un élément tangent ne passant ni par ξ, ni par η et, grâce à lui, nous avons déterminé deux voisinages $V(\xi)$, $V(\eta)$ de ξ et η tels que si X est dans le premier, s dans le second, $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ soit inférieur à un nombre λ inférieur à 1. Alors, $\Lambda(s, X)$ est inférieur à λ. Si, de plus, le voisinage $V(\eta)$ est vu de chacun de ces X sous un angle plus grand que $\alpha > 0$, la démonstration est acquise.

Or, si le cône tangent à F et de sommet σ ne passe pas par ξ, de ξ on voit $V(\eta)$ sous un angle non nul 2α; de tout point de $V(\xi)$, pris assez petit, on le verra sous un angle supérieur à α. Ainsi, il ne reste à examiner que les domaines tels que, si l'on a pris M ayant un élément tangent $\overline{M}$ ne passant pas par ξ, le cône tangent à F en un point quelconque η passe toujours par M ou ξ. En d'autres termes, le domaine doit être biétoilé et de sommets M et ξ, quel que soit le choix indiqué de M; donc il doit être pyramidal, F étant constituée d'une partie conique $\mathscr{C}$ de sommet ξ et d'une base $\mathscr{B}$.

Imaginons alors que les points ξ et η du paragraphe précédent sont confondus en notre sommet ξ; prenons $V(\xi)$ et $V(\eta)$ confondus et limités par une section $\mathscr{B}_1$ parallèle à $\mathscr{B}$. M sera pris intérieur à $\mathscr{B}$, ainsi que $V(M)$. Alors, pour s et X dans $V(\xi)$, $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ est inférieur à un nombre λ inférieur à 1, donc aussi $\Lambda(s, X)$. Mais, de tout point X de $V(\xi)$ sauf du point ξ [1]), on voit $V(\eta) \equiv V(\xi)$ sous un angle supérieur au minimum α

---

[1]) Le cas de $\int_F \Lambda(s, \xi)\, d\theta_\xi^s$ n'est pas à examiner puisque $\int_F d\theta_\xi^s$ est inférieur à $\frac{E}{2}$;

de l'angle sous lequel on voit $V(\xi)$, ou $\mathscr{B}_1$, d'un point quelconque P frontière de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{C}$, lequel angle est une fonction continue de P. Donc le lemme est prouvé dans tous les cas.

La fonction, harmonique dans un domaine convexe et se réduisant sur sa frontière à une fonction continue donnée, est donc fournie par la série de Neumann qui converge à la façon d'une progression géométrique; dans tous les cas, sans aucune restriction [1]).

6. J'ai dit, à plusieurs reprises, que pour atteindre tous les cas il fallait utiliser des généralisations de l'intégrale mais que le lecteur pouvait cependant se borner à l'examen de domaines simples et à l'emploi d'intégrales ordinaires. Cela demande des explications: on peut n'utiliser que les intégrales ordinaires et constater, comme au paragraphe 2, l'existence d'une lacune dans le raisonnement de Neumann, comme au paragraphe 3 l'inexactitude du lemme avec certains énoncés, ou comprendre la marche des démonstrations des paragraphes 4 et 5. Mais ces démonstrations exigent, même pour les domaines les plus simples et les fonctions à la frontière les plus simples, l'emploi d'intégrales étendues aux parties A_i et B_i de la frontière et nous avons dit que tout ce qu'on savait sur ces ensembles c'était que A_i est fermé et B_i ouvert. Ainsi, supposons que le domaine soit un cercle, B_i pourra être formé d'une infinité dénombrable d'arcs de circonférence. Si l'on veut, avec Neumann, n'utiliser que les intégrales ordinaires, le raisonnement présente une lacune grave qui a été signalée depuis longtemps par M. Volterra (« Sul principio di Dirichlet », *Rend. del Circ. di Pal.*, t. XI, 1897). M. Volterra a indiqué comment lever cette difficulté qui se rencontrait aussi dans d'autres problèmes.

On voit combien ces questions simples sont délicates et que l'objection examinée ici n'est pas la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Neumann. L'objection de Weierstrass n'est pas non plus la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Riemann:

---

1) Les cinq premiers paragraphes de ce Mémoire ont paru dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (9e série, t. XVI, 1937, pp. 205-217). Par suite d'une malencontreuse erreur de transmission il n'a pu être tenu compte que d'une partie des corrections et additions faites par l'auteur sur les épreuves. En particulier, ont été omises des indications bibliographiques et des observations qui, légèrement développées, ont été réunies dans le paragraphe supplémentaire qui suit, paru dans le même tome du *Journal de mathématiques pures et appliquées* pp. 421 à 423.

M. Hadamard a montré qu'il existait des cas où les données sont telles que le problème de Dirichlet ait une solution et que, pourtant, le problème de minimum envisagé par Riemann n'ait même aucun sens; toutes les intégrales intervenant dans ce problème étant infinies (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXXIV, 1906). Et l'exemple de M. Hadamard est aussi simple que possible; le domaine est un cercle sur la frontière duquel est donnée une fonction continue convenablement choisie. *Il n'y a donc pas équivalence entre le problème de Dirichlet et le problème de Riemann.*

On peut préciser la relation entre ces deux problèmes en disant que toutes les fois que le problème de Riemann a une solution, celle-ci fournit aussi la solution du problème de Dirichlet. Mais, pour démontrer ce fait, il ne faut pas compter sur le raisonnement classique de Riemann basé sur la formule de Green et ses généralisations, car celui-ci suppose qu'on puisse parler d'intégrales étendues à la frontière, — donc que celle-ci soit assez simple —, et qu'on ne rencontre que des fonctions dérivables encore à la frontière — ce qui n'a pas lieu en général même pour un domaine circulaire. Il m'a fallu pour arriver au résultat (« Sur le problème de Dirichlet », *Rend. del Circ. Mat. di Pal.*, t. XXIV, 1907) faire un assez long détour. M. Zaremba (« Sur le principe du minimum », *Bull. de l'Ac. de Cracovie*, juillet 1909) a obtenu ce résultat tout autrement.

Peut-il arriver que le problème de Riemann ait un sens mais n'ait pas de solution et que le problème de Dirichlet en ait une ? Non, cela découle facilement des travaux cités et d'autres au sujet desquels on se reportera avec fruit à un Mémoire de M. F. Vasilesco, couronné récemment par l'Académie de Belgique (*Mémoires de l'Ac. roy. de Belgique*, t. XVI, 1937). L'hypothèse que le problème de Riemann ait un sens et pas de solution que je viens d'envisager, donc de cas tels que le problème de Dirichlet n'ait pas non plus de solution, se présente effectivement comme je l'ai montré (*Comptes rendus des séances de la Soc. Math. de France*, t. XXXXI, 1912). En d'autres termes, l'objection de Weierstrass n'est pas relative seulement à la forme du raisonnement, *la circonstance prévue par Weierstrass : une quantité variable n'atteignant pas son minimum, se rencontre effectivement pour*

l'intégrale de Riemann, comme nous avons vu au paragraphe 3 qu'elle se rencontre effectivement pour la quantité Λ *de Neumann.*

La contribution de M. Hadamard au problème de Dirichlet rappelée ci-dessus occupe certes peu de place dans l'œuvre considérable de M. Hadamard, son intérêt n'en est pas moins fort grand; elle m'a été très utile mathématiquement jadis, aujourd'hui elle sera pour moi prétexte à lui dédier cette petite étude critique.