3. Les deux derniers axiomes de la géométrie euclidienne plane

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Comme $\varphi \neq 0$, $\mu = \mu'$; ainsi Z_2 laisse fixes tous les points de la droite OC. On en déduit que Z applique une droite sur une droite et, par suite, le plan sur le plan. De plus, comme elle conserve le parallélisme, elle est de la forme (5). Donc G' est confondu avec G. C.Q.F.D.

3. Les deux derniers axiomes de la géométrie euclidienne plane

Il convient d'introduire de nouveaux axiomes afin de parachever la construction de ce que nous avons appelé la géométrie euclidienne plane. Ces axiomes nous permettront d'affirmer que le corps de base K appartient à une certaine famille de corps réels. Alors que les axiomes précédents ont essentiellement un contenu algébrique, les prochains — l'un d'eux, tout au moins — précisent la structure topologique de K.

3.1. Soit un corps L. A et B étant deux parties non vides de L, on désigne par $A+B$ l'ensemble des éléments $a+b$, où $a \in A$ et $b \in B$. De même, on note AB l'ensemble des éléments ab, où $a \in A$ et $b \in B$; l'ensemble $\{-1\}A$ s'écrit $-A$. Rappelons qu'on ordonne le corps L en y déterminant une partie P, appelée *partie positive* de L pour l'ordre considéré, satisfaisant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
&1) \quad P \cup (-P) = L, \\
&2) \quad P \cap (-P) = \{0\}, \\
&3) \quad P + P = P, \\
&4) \quad P.P = P.
\end{aligned}$$

Les points (1), (2) et (3) introduisent une structure de groupe abélien ordonné dans le groupe additif sous-jacent à L. Alors si $a, b \in L$, on écrit $a \leqq b$ quand b-a appartient à P. On écrit $a < b$ quand, de plus, a et b sont distincts. Comme $a^2 = (-a)^2$ quel que soit a dans L, P contient tous les carrés de L et, en particulier, l'élément unité 1 de L. Il en résulte immédiatement qu'un corps dans lequel (-1) est un carré n'est pas ordonnable. En revanche, il existe un critère important concernant les corps commutatifs ordonnables. C'est le théorème de Artin-Schreier (voir [7]): la condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps commutatif soit ordonnable est qu'il soit formellement réel. Par suite, nous pouvons affirmer que le corps de base peut être ordonné d'une manière au moins (théorème 3).

A priori, K peut même être ordonné de plusieurs manières différentes. Néanmoins, pour que K puisse être ordonné d'une manière unique, il suffit que l'ensemble des carrés de K possède dans K les quatre propriétés attribuées ci-dessus à la partie P du corps L. C'est ce que nous allons énoncer sous forme d'un axiome concernant l'ensemble des réflexions dans G.

Axiome P VI *(Axiome du compas). Soit* v *et* v′ *deux réflexions perpendiculaires et soit* Φ *et* Φ' *deux faisceaux de première classe contenant* v′. *Il existe deux réflexions perpendiculaires* r *et* s, *incidentes avec* v, r *étant dans* Φ *et* s *appartenant à l'un au moins des faisceaux* Φ' *et* vΦ'v.

Traduisons cet énoncé en langage de géométrie élémentaire. A et B étant deux points du plan, convenons d'appeler «cercle de diamètre AB» l'ensemble des points situés à l'intersection de deux droites perpendiculaires passant l'une par A et l'autre par B. L'axiome P VI dit ceci: si l'on prend deux droites perpendiculaires v et v', deux points A et B de v' et le symétrique B' de B relativement à v, alors la droite v coupe l'un au moins des deux cercles de diamètres AB et AB'. On postule ainsi la possibilité, dans certaines conditions, de reporter un segment donné d'un point donné à une droite donnée ne passant pas forcément par le point. C'est là un des axiomes les plus constructifs de la géométrie élémentaire. Nous allons montrer que cet axiome permet d'affirmer que le corps de base K peut être ordonné d'une manière unique.

Proposition 27. *L'axiome P VI est équivalent à l'affirmation suivante: quel que soit l'élément* α *du corps* K, *l'équation en* μ*:*

$$\mu^4 = \alpha^2 ,$$

a des solutions dans K.

Reprenons les éléments figurant dans l'énoncé de l'axiome P VI. Lorsque Φ contient v, cet axiome formule une banalité.

Plaçons-nous alors dans le cas où v n'est pas dans Φ. Désignons par m l'un des éléments bissecteurs de v et v', et par e l'élément de Φ perpendiculaire à v'. Introduisons dans le plan les coordonnées orthonormales relatives au système (v', v, m, e). Les faisceaux Φ, Φ' et $v\Phi'v$ sont respectivement homologues aux points $A(1, 0)$, $B(\alpha, 0)$ et $B'(-\alpha, 0)$, où α est susceptible d'être n'importe quel élément non nul de K. Soit:

$$(\bar{r}) \equiv \mu\xi + \eta - \mu = 0\,, \tag{1}$$

l'équation d'une droite $\bar{r}$ contenant le point A et coupant la droite $\bar{v}$ homologue à v. Soit:

$$\xi - \mu\eta - \varepsilon\alpha = 0\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,, \tag{2}$$

les équations des deux droites perpendiculaires à $\bar{r}$ et contenant B ou B' suivant que ε égale 1 ou -1. L'équation de $\bar{v}$ est:

$$(\bar{v}) = \xi = 0\,. \tag{3}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des équations (2) soit compatible avec (1) et (3) est donnée par:

$$(\alpha + \mu^2)(\alpha - \mu^2) = 0\,.$$

La proposition se déduit immédiatement de là. C.Q.F.D.

Désignons par C l'ensemble des carrés de K. On a:

$$\begin{array}{ll} 1) & C \cup (-C) = K\,, \\ 2) & C \cap (-C) = \{0\}\,, \\ 3) & C + C = C\,, \\ 4) & C.C = C\,. \end{array}$$

1) découle de la proposition précédente; 2) est une conséquence immédiate de la proposition 25; 3) résulte du fait que K est pythagoricien; 4) est évident dans un corps commutatif. Il existe donc dans K un ordre pour lequel C constitue la partie positive. D'autre part, quel que soit l'ordre défini dans K, la partie positive doit contenir C. Par suite, K ne peut être ordonné que d'une seule manière.

Nous qualifierons de *positifs* les éléments de C et de *strictement positifs* les éléments non nuls de C. Étant donnés deux éléments α et β de K, nous écrirons $\alpha \leqq \beta$ ou $\alpha < \beta$ suivant que $\beta - \alpha$ est positif ou strictement positif. Nous appellerons *racine carrée* d'un élément positif α de K l'élément positif de K dont le carré égale α; nous la noterons $\alpha^{\frac{1}{2}}$. Il est clair que, dans K, tout élément positif admet une racine carrée et une seule.

Lorsque α et β sont deux éléments de K tels que $\alpha \leqq \beta$, on appelle *intervalle fermé* $[\alpha, \beta]$ l'ensemble des éléments ξ de K tels que $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Cette notion peut être mise en relation avec celle de segment dans un système polaire. Soit v' une réflexion quelconque et soit a et b deux éléments distincts de $\Pi(v')$. On appelle *segment* $[a, b]$ l'ensemble des éléments z de $\Pi(v')$ tels qu'il existe deux réflexions perpendiculaires incidentes avec z et contenues l'une dans $\Phi(v', a)$, l'autre dans $\Phi(v', b)$. Si l'on introduit dans le plan des coordonnées orthonormales relativement à un système (v', v, m, e), les équations des droites $\bar{a}$ et $\bar{b}$ homologues à a et b sont:

$$(\bar{a}) \equiv \xi - \alpha = 0, \qquad (\bar{b}) \equiv \xi - \beta = 0,$$

où α et β sont deux éléments distincts de K. Si l'on suppose que $\alpha \leqq \beta$, le segment $[a, b]$ est l'ensemble des réflexions z dont les droites homologues $\bar{z}$ sont données par:

$$(\bar{z}) \equiv \xi - \zeta = 0,$$

où ζ appartient à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Soit α et β deux éléments de K tels que $\alpha < \beta$. On appelle *intervalle ouvert* $]\alpha, \beta[$ l'ensemble des éléments ζ de K tels que $\alpha < \zeta < \beta$. On montre que les intervalles ouverts de K constituent la base d'une structure de corps topologique dans K. Le dernier axiome que nous allons poser précise cette structure.

3.2.

Axiome P VII (Axiome d'Archimède). *A toute paire* (ξ, η) *d'éléments strictement positifs de* K, *on peut associer un entier naturel* n *tel que* $\eta < \mathrm{n}\xi$.

On peut énoncer cet axiome en termes de R-groupes. Soit une réflexion s, deux éléments distincts quelconques a et b de $\Pi(s)$, ainsi que l'élément bissecteur u de a et b. On considère la suite de segments S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ définie de la manière suivante: $S_1 = [a, b]$; si $S_k = [a', b']$, on pose $S_{k+1} = [a'ua', b'ub']$. Alors la famille des segments S_i constitue un recouvrement de $\Pi(s)$. Nous n'insisterons pas sur ce point qui ne nous sera pas utile pour ce qui suit.

THÉORÈME 4. *Le corps de base* K *est isomorphe à un corps réel pythagoricien.*

Un corps réel est un sous-corps du corps R des nombres réels. Nous considérerons K et R comme des extensions du corps Q des nombres rationnels. On vérifie, comme nous l'avons fait pour K, que R peut être ordonné d'une manière et d'une seule. Il en est de même pour Q, comme on le voit sans peine. Par suite, les ordres induits dans Q par ceux de K et de R coïncident. Pour établir le théorème, nous allons faire usage de la notion de coupure de Dedekind dans Q. Rappellons-en quelques propriétés utiles pour la suite de la démonstration. On appelle coupure (M, P) du corps Q toute partition de Q en deux parties non vides M et P telles que, quels que soient $s \in M$ et $t \in P$, on ait $s < t$. A chaque coupure (M, P) de Q on peut associer un nombre réel a bien déterminé tel que l'on ait dans R:

$$\begin{aligned} x &\leqq a \qquad \forall x \in M , \\ a &\leqq y \qquad \forall y \in P . \end{aligned} \tag{1}$$

Cela entraîne, en particulier, que:

$$a = \sup M = \inf P , \tag{2}$$

dans R. Si a et a' sont les nombres réels associés à deux coupures (M, P) et (M', P') respectivement, on peut écrire:

$$\begin{aligned} M \subset M' &\Rightarrow a \leqq a' , \\ P \subset P' &\Rightarrow a' \leqq a . \end{aligned} \tag{3}$$

qui sont des conséquences de (2). De plus:

$$\sup(M + M') = \inf(P + P') = a + a' . \tag{4}$$

Enfin, désignons par U_+ l'ensemble des éléments strictement positifs d'une partie U de Q; si M_+ et M'_+ ne sont pas vides:

$$\sup(M_+.M'_+) = \inf(P.P') = aa' . \tag{5}$$

Cela rappelé, prenons un élément quelconque α dans K. En vertu de l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel m tel que α et $-\alpha$ soient tous deux strictement inférieurs à m. Par suite $-m<\alpha<m$; donc l'ensemble des nombres rationnels strictement inférieurs à α et celui des nombres rationnels strictement supérieurs à α ne sont pas vides. Désignons alors par $M(\alpha)$ l'ensemble des éléments de Q inférieurs ou égaux à α et ar $P(\alpha)$ l'ensemble des éléments de Q strictement supérieurs α. On associe ainsi à α une coupure $(M(\alpha), P(\alpha))$ de Q. Désignons par $f(\alpha)$ le nombre réel attaché à cette coupure. On voit ımmédiatement que $f(\alpha) = \alpha$ quand α est dans Q.

L'application f est une injection strictement croissante de K dans R. En effet, soit α et β deux éléments de K avec $\alpha<\beta$. Il existe un nombre naturel p tel que $2<p(\beta-\alpha)$. Par suite: $2.p^{-1} <\beta-\alpha$. Soit q le plus petit entier rationnel strictement supérieur à $p\beta$. Alors:

$$\frac{q-1}{p} \leqq \beta \quad ; \quad \alpha < \beta - \frac{2}{p} < \frac{q-2}{p} .$$

De là: $f(\alpha) \leqq (q-2)p^{-1}$ et $(q-1)p^{-1} \leqq f(\beta)$. Donc $f(\alpha) < f(\beta)$.

Quels que soient α et β dans K, on peut écrire:

$$M(\alpha)+M(\beta) \subset M(\alpha+\beta); \quad P(\alpha)+P(\beta) \subset P(\alpha+\beta) .$$

D'autre part:

$$\sup\,(M(\alpha)+M(\beta)) = \sup\, M(\alpha)+\sup\, M(\beta) ,$$
$$\inf\,(P(\alpha)+P(\beta)) = \inf\, P(\alpha)+\inf\, P(\beta) .$$

On déduit alors de (2), (3) et (4) que $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$. Donc f est un isomorphisme du groupe additif des éléments de K dans celui de R. En particulier, on peut écrire: $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

Quels que soient α et β dans K, $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. Le fait est évident quand l'un des deux éléments est nul. Considérons le cas où α et β sont strictement positifs dans K. En vertu de l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel r tel que $1<r\alpha$. Ainsi $r^{-1}<\alpha$, et l'ensemble $M_+(\alpha)$ des éléments strictement positifs de $M(\alpha)$ n'est pas vide. Il en est de même de $M_+(\beta)$. Or nous pouvons écrire:

$$M_+(\alpha).M_+(\beta) \subset M_+(\alpha\beta)\,; \qquad P(\alpha).P(\beta) \subset P(\alpha\beta)\,,$$

et comme:

$$\begin{aligned} &\sup\big(M_+(\alpha).M_+(\beta)\big) = \big(\sup M_+(\alpha)\big).\big(\sup M_+(\beta)\big)\,,\\ &\inf\big(P(\alpha).P(\beta)\big) = \big(\inf P(\alpha)\big).\big(\inf P(\beta)\big)\,, \end{aligned}$$

les relations (2), (3) et (5) permettent d'affirmer que $f(\alpha\beta)$ égale $f(\alpha)f(\beta)$, dans ce cas. Lorsqu'on tient compte du fait que $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, on voit que cette égalité est vraie quels que soient α et β dans K. Par suite, f est un isomorphisme du corps K dans le corps R. C.Q.F.D.

Il convient d'observer que la démonstration précédente ne fait pas usage de l'axiome P VI mais uniquement du fait que K est un corps formellement réel archimédien.

3.3. Terminons ce paragraphe en montrant que les sept axiomes que nous avons posés caractérisent les groupes euclidiens de dimension 2 sur les corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs.

Considérons un ensemble E et un corps commutatif ordonné L. On appelle *L-distance* sur E une application δ de $E\times E$ dans la partie positive de L telle que:

1) $\delta(a\,,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \qquad a\,,b\in E\,,$
2) $\delta(a\,,b) = \delta(b\,,a) \qquad \forall a\,,b\in E\,,$
3) $\delta(a\,,b) \leq \delta(a\,,c)+\delta(b\,,c)\,; \qquad \forall a\,,b\,,c\in E\,.$

On appelle *L-isométrie* de E relativement à δ toute application f dans E dans lui-même telle que $\delta(f(a), f(b)) = \delta(a, b)$ quels que soient a et b dans E. Lorsque L est un corps réel, δ est une *distance* et f est une *isométrie* de E relativement à δ.

Revenons à un groupe G satisfaisant les cinq premiers axiomes. Le corps de base K qui lui est associé est formellement réel. En vertu du théorème de Artin-Schreier, on peut admettre que l'on a introduit dans K un ordre déterminé. Dans le plan relatif à G, nous avons considéré une fonction D à valeurs dans K et définie pour toute paire de points (P_1, P_2) (voir (4), 2.11).

Nous avons vu que $D(P_1, P_2)$ est un carré dans le corps K, qui est pythagoricien. Posons alors:

$$d(P_1, P_2) = \big(D(P_1, P_2)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Il découle immédiatement des propriétés de D que d est invariante relativement à G et qu'elle satisfait les conditions 1) et 2) appliquées aux K-distances dans le plan. De plus, prenons trois points quelconques P_1, P_2 et P_3 et désignons par d_1, d_2 et d_3 les éléments $d(P_2, P_3)$, $d(P_3, P_1)$ et $d(P_1, P_2)$ respectivement. On voit sans peine que:

$$S(P_1, P_2, P_3) = (d_1+d_2+d_3)(-d_1+d_2+d_3)(d_1-d_2+d_3)(d_1+d_2-d_3),$$

où $S(P_1, P_2, P_3)$ est la quantité définie par (7) au n° 2.11. En vertu de la relation (8) figurant au même numéro, $S(P_1, P_2, P_3)$ est un carré dans K. Mais, dans l'égalité ci-dessus, trois au moins des facteurs apparaissant au second membre sont positifs; il en est alors de même du quatrième. Par suite:

$$d(P_1, P_2) \leqq d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3),$$

quels que soient les points P_1, P_2 et P_3. Donc d est une K-distance dans le plan. La proposition 26 permet d'affirmer que G est le groupe des K-isométries du plan relativement à d.

Lorsque l'axiome P VII est satisfait, d est une distance dans le plan. Si, de plus, l'axiome P VI est vérifié, on peut énoncer:

THÉORÈME 5. *Tout groupe satisfaisant les axiomes* P I *à* P VII *est isomorphe à un groupe* GE(2, K), *où* K *est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs.*

4. Critique du système des axiomes P I à P VII

4.1. Lorsqu'on expose une théorie mathématique, il convient d'examiner le système des axiomes adoptés sous le triple aspect de la consistance, de la catégoricité et de l'indépendance. La consistance — ou non-contradiction — des axiomes que nous avons posés est assurée par l'existence d'un modèle satisfaisant: la géométrie euclidienne plane continue, par exemple.