VERALLGEMEINERUNGEN EINIGER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

VERALLGEMEINERUNGEN EINIGER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

von Octavian Em. GHEORGHIU

(Reçu le 10 novembre 1962)

1. In der 1959 erschienenen Arbeit der Herrn St. GOŁĄB und A. SCHINZEL [1] wird die allgemeine stetige Lösung untersucht u. es werden die messbaren und unmessbaren Lösungen für die Funktionalgleichung

$$f[x+yf(x)] = f(x)\cdot f(y), \tag{1}$$

augeführt.

Eine Verallgemeinerung dieses Funktionalgleichung wäre folgende

$$f[x+yg(x)] = h(x)\cdot k(y) \tag{2}$$

wobei x, y, $z \in R$ und f, g, h, k: $R \to R$
(d.h., dass die Argumente und die Funktionswerte reel sind und die Lösung im Bereiche der reelen eineindeutigen Funktionen gegeben wird.)

Um die Funktionalgleichung (2) in eine Funktionalgleichung von einer einzigen überzuführen, geht man wie folgt vor:

Man nimmt in (2) $y = 0$ und für $k(0) = A \neq 0$, aus dem die Gleichung

$$f(x) = Ah(x), \tag{3}$$

hervorgeht.
Man setzt (3) in (2) u. erhält

$$Ah[x+yg(x)] = h(x)\cdot k(y). \tag{4}$$

Nimmt man in (4) $x = 0$ u. für $h(0) = \alpha \neq 0$, $g(0) = a \neq 0$ aus dem die Gleichung

$$Ah(ay) = \alpha k(y), \tag{5}$$

hervorgeht.

Setzt man (5) in (4) erhält man die Gleichung

$$\alpha h\left[x+yg(x)\right] = h(x)\cdot h(ay). \qquad (6)$$

Man nimmt die Funktionen

$$h(x) = \alpha H(x), \qquad g(x) = aG(x), \qquad (7)$$

u. führt durch $z=ay$ eine neue Veränderliche ein. Die Gleichung (6) wird dadurch zu

$$H\left[x+zG(x)\right] = H(x)\cdot H(z). \qquad (8)$$

Da die Funktion $h(x)$ im Bereiche R eineindeutig ist, folgt aus (7), dass auch die Funktion $H(x)$ eineindeutig ist, und aus (8) folgt nach der symetrischen Form der linken Seite

$$H\left[x+zG(x)\right] = H\left[z+xG(z)\right],$$

mithin folgt

$$x+zG(x) = z+xG(z). \qquad (9)$$

Für die Funktion $G(x)$ erhält man den allgemeinen Ausdruck

$$G(x) = 1+\lambda x, \qquad (10)$$

wobei λ eine beliebige reelle Konstante ist.

Zieht man (10) in (8) in Betracht, so erhält man die von H. R. Thielmann (Siehe J. Aczél [2], S. 75) gefundene Funktionalgleichung

$$H(x+z+\lambda xz) = H(x)\cdot H(z), \qquad (11)$$

deren allgemeine Lösung nach Herrn J. Aczél

$$H(x) = (1+\lambda x)^m, \qquad (12)$$

ist.

Die Funktionalgleichung (2) hat zur allgemeinen Lösung die Funktionen

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= A\alpha(1+\lambda x)^m \\ g(x) &= a(1+\lambda x) \\ h(x) &= \alpha(1+\lambda x)^m \\ k(x) &= A(1+a\lambda x)^m. \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

wobei a, α, A, m und λ beliebige reelle Konstanten sind.

Es gibt noch folgende weitere Lösungen:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0, \; g(x) = \text{beliebig}, \; h(x) = \text{beliebig}, \; k(x) \equiv 0 \\ f(x) \equiv 0, \; g(x) = \text{beliebig} \;\; h(x) \equiv 0, \; k(x) = \text{beliebig} \\ f(x) = B \cdot C, \;\; g(x) = \text{beliebig}, \;\; h(x) = B, \;\; k(x) = C \\ f(x) = \text{beliebig}, \; g(x) \equiv 0, \; h(x) = \text{beliebig}, \; k(x) = C \\ f(x) = A\alpha e^{mx}, \; g(x) = C, \; h(x) = \alpha e^{mx}, \; k(x) = A e^{mCx} \end{cases}$$

die beliebige Konstanten und nebenbei auch beliebige Funktionen enthalten.

2. In der Literatur sind viele Funktionalgleichungen welche die Sinus-Funktion kennzeichnen, gegeben. In diesem Abschnitt behandeln wir eine Verallgemeinerung der Funktionalgleichung [2, S. 114]

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y) . \tag{15}$$

Diese Gleichung wurde von D. Carmichael (1909), von H. Wilson (1919), von Herrn L. Vietoris (1960), von Herrn J. Aczél (1961), [2], der eine reichhaltige Bibliographie angibt, von Herrn S. Kurepa (1960) untersucht und von Herrn E. Vincze (1961) welcher sie im komplexen Bereicht untersucht hat [3].

Die Funktionalgleichung kennzeichnet im reellen Bereich die trigonometrische, hyperbolische u. die duale Sinusfunktion in gleichem Mass und stellt folglich eine Synthese aller Funktionalgleichungen dar, welche jede für sich die drei Sinusfunktionen kennzeichnen.

Die Matrixen Funktionalgleichung

$$\begin{bmatrix} A(x+y) & B(x+y) \\ \lambda B(x+y) & A(x+y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(x-y) & B(x-y) \\ \lambda B(x-y) & A(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ \lambda B(x) & A(x) \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} A(y) & B(y) \\ \lambda B(y) & A(y) \end{bmatrix}^2 , \tag{16}$$

gibt in einem für $\lambda = -1; 0; +1$ alle drei Typen wieder.

Sie ist gleichwertig mit dem System

$$\begin{cases} A(x+y)\,A(x-y)+\lambda B(x+y)\,B(x-y) = A^2(x)+\lambda B^2(x)-A^2(y)-\lambda B^2(y)\,, \\ A(x+y)\,B(x-y)+B(x+y)\,A(x-y) = 2A(x)\,B(x)-2A(y)\,B(y)\,, \end{cases} \tag{17}$$

wobei $A(x)$ und $B(x)$ reelle messbare Funktionen von einer Veränderlichen sind.

Die allgemeine Lösung für der Fall $\lambda = -1$, erhält man, in dem (17) durch Einführung der komplexen Funktion mit einer reelen Veränderlichen

$$L(x) = A(x)+iB(x)\,, \qquad i^2 = -1\,, \tag{18}$$

aus eine einzige Gleichung reduziert wird.
Daraus folgt die Funktionalgleichung

$$L(x+y)\cdot L(x-y) = L^2(x)-L^2(y)\,, \tag{19}$$

und die allgemeine Lösung für $A(x)$ und $B(x)$ ist

$$\begin{cases} A(x) = ax \\ B(x) = bx \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x ch\beta x - b \cos \alpha x sh\beta x \\ B(x) = a \cos \alpha x sh\beta x + b \sin \alpha x ch\beta x \end{cases}$$
$$\begin{cases} A(x) = ash\alpha x \cos \beta x - bch\alpha x \sin \beta x \\ B(x) = ach\alpha x \sin \beta x + bsh\alpha x \cos \beta x\,, \end{cases} \tag{20}$$

wobei a, b, α, β beliebige reelle Konstante sind.

Die allgemeine Lösung im Falle $\lambda = 0$ wird durch Einführung der Dual-Funktion von einer Veränderlichen

$$M(x) = A(x)+\varepsilon B(x)\,, \qquad \varepsilon^2 = 0\,, \tag{21}$$

aus gefunden.

Dann folgt für $M(x)$ die Gleichung (15) und die allgemeine messbare Lösung für $A(x)$ u. $B(x)$ ist

$$\begin{cases} A(x) = ax \\ B(x) = bx \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x \\ B(x) = b \sin \alpha x + a\beta x \cos \alpha x \end{cases}$$
$$\begin{cases} A(x) = ash\alpha x \\ B(x) = bsh\alpha x + a\beta x ch\alpha x\,, \end{cases} \tag{22}$$

wobei a, b, α, β beliebige reelle Konstanten sind.

Geht man ähnlich für den Fall $\lambda = +1$ vor, so erhält man die allgemeine messbare Lösung

$$\begin{cases} A(x) = ax \\ B(x) = bx \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x + b \sin \beta x \\ B(x) = a \sin \alpha x - b \sin \beta x \end{cases}$$
$$\begin{cases} A(x) = a sh \alpha x + b sh \beta x \\ B(x) = a sh \alpha x - b sh \beta x, \end{cases} \tag{23}$$

wobei a, b, α, β beliebige reelle Konstanten sind.

Die Matrixen-Gleichung (16) kann auch verallgemeinert werden. Dies wird jedoch der Inhalt einer anderen Arbeit sein.

BIBLIOGRAPHIE

Gołab, St. und Schinzel, A., *Publ. Math. Debrecen*, t. 6, (1959), S. 113-125.

[2] Aczél, J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Basel, Stuttgart-Berlin, 1961.

[3] Vincze, E., *Matematikai Lapok*, XII, évfolyam, (1961), S. 18-31.

Str. Traian Lalescu 1,
Timisoara 3
Roumanie