Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Kapitel: Première Section Préliminaires et historique

Autor: Fréchet, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

ont donné naissance à des applications. Mais une telle étude est *en dehors* du sujet du présent article.

Avant d'aborder notre sujet principal, nous ferons quelques remarques sur d'anciennes conceptions de la différentielle.

Première Section

Préliminaires et historique

Une Variable

Considérons d'abord le cas des fonctions numériques *d'une* variable numérique. La raison de l'introduction de la notion de différentielle doit être cherchée principalement dans *deux directions.*

I — En désignant, suivant la commodité, par l'une ou l'autre des notations $D\,f\,(x)$, f'_x, la dérivée de $f\,(x)$, le théorème des fonctions composées s'écrit sous la forme:

$$Df\,(y\,(x)) = f'_y\,y'_x\,. \tag{1}$$

Posons

$$dy\,(x) = y'_x\,dx$$

et de même

$$df(y) = f'_y\,dy, \tag{2}$$

la formule (1) devient:

$$df(y\,(x)) = f'_y\,y'_x dx = f'_y\,dy\,(x)\,. \tag{3}$$

De sorte que *la même formule* (2) convient aussi bien pour le cas où y est une variable indépendante comme dans (2) que pour le cas où y est une fonction d'une autre variable, comme dans (3).

C'est là un premier avantage très appréciable pour les mathématiciens.

II — D'autre part, on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x + \varepsilon \qquad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \quad \varepsilon = 0\,,$$

ou, en posant $dy = y'_x\,\Delta x$,

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x\,, \tag{4}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon \Delta x}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon}{y'(x)}\,. \tag{5}$$

Donc, on peut dire que, si $y'_x \neq 0$, dy est la «partie principale» de Δy quand $\Delta x \to 0$. C'est là un avantage particulièrement apprécié des physiciens, qui pourront, quand Δx est petit, remplacer approximativement Δy, qui peut être une fonction assez compliquée de Δx, par $dy = y'_x \Delta x$, qui est une fonction linéaire de Δx.

Critique

Il faut toutefois remarquer que ce raisonnement suppose $y'_x \neq 0$. Ceci conduit donc à préférer à la formule (5), la formule (4).

La signification de l'approximation de Δy par dy n'est plus la même, au lieu de dire que $\frac{\Delta y}{dy} \to 1$ quand $\Delta x \to 0$, on dira que dy ne diffère de Δy que par une quantité infiniment petite par rapport à Δx.

Deux Variables

La formule des fonctions composées peut s'écrire:

$$Df\big(y(t)\,,\ z(t)\big) = f'_y y'_t + f'_z z'_t\,.$$

En multipliant par dt, on a:

$$df\big(y(t)\,,\ z(t)\big) = f'_y dy(t) + f'_z dz(t)\,.$$

Mais on peut aussi écrire:

$$df(y, z) = f'_y dy + f'_z dz \tag{6}$$

qui a, comme pour (2), l'avantage d'être écrite indépendamment de la façon dont y et z dépendent de t. C'est encore ici un avantage appréciable pour les mathématiciens.

Quand f'_x, f'_y *existent et sont continues* en x et y *près* de x_0, y_0, on sait qu'on peut écrire:

$$\Delta f(x, y) = \Delta x (f'_{x_0} + \varepsilon) + \Delta y (f'_{y_0} + \varepsilon') \tag{7}$$

où ε et ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro. On peut donc écrire

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{\varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y}{f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y} .$$

Dès lors, on est tenté de dire que: lorsque Δx et Δy tendent vers zéro, $\dfrac{\Delta f}{df} \to 1$, c'est-à-dire que df est la partie principale de Δf. Ici encore, df étant linéaire en Δx et Δy est en général plus simple que Δf, avantage encore apprécié par les physiciens.

Critique

Non seulement, comme dans le cas d'une variable, le raisonnement tombe si f'_{x_0} et f'_{y_0} sont nuls, mais il tombe encore si, en supposant, par exemple, $f'_{y_0} \neq 0$, on fait tendre Δx et Δy vers zéro en maintenant la relation

$$\Delta y = \frac{-f'_{x_0}}{f'_{y_0}} \Delta x .$$

Des observations analogues se présenteraient dans le cas où f dépendrait de plus de deux variables numériques. On voit donc qu'il serait préférable de ne pas définir la différentielle de f comme la valeur principale de son accroissement.

Autres critiques: La formule (7) peut s'écrire sous une forme analogue à (4):

$$\Delta f = df + \varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y \tag{7 bis}$$

$$\text{avec } \lim \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{matrix} \right\} = 0$$

quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro. Mais pour l'obtenir, on avait dû supposer, non seulement, comme pour (4), l'existence des dérivées partielles au point considéré x_0, y_0, mais encore l'existence et la continuité de ces dérivées *au voisinage* de ce point.

De même, quand on essaie d'étendre au cas de deux variables, les propriétés de la différentielle d'une fonction d'une variable, on est amené, pour chacune, à faire une supposition plus stricte que l'existence des dérivées partielles au point considéré.

Ce sont ces diverses considérations préliminaires qui ont amené indépendamment plusieurs auteurs à formuler des définitions de la différentiabilité plus strictes. Il se trouve que quoique de formes *très différentes* elles conduisent cependant, comme nous allons le voir — et c'est là, probablement, que se placera surtout la nouveauté de nos résultats — à des définitions *équivalentes* de la différentiabilité, et à des expressions *identiques* de la différentielle. Mais chacune a son intérêt et comme plusieurs n'ont pas attiré l'attention, il nous a paru utile de les faire connaître.

Historique

Dans la première édition (datant de 1902) de son excellent cours d'analyse mathématique [1], nous trouvons à la page 25, tome I, sous la plume de Goursat, la définition suivante: « Soit $\omega = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes x, y, z; on appelle différentielle totale $d\omega$ l'expression suivante:

$$d\omega = f'_x \, dx + f'_y \, dy + f'_z dz$$

où dx, dy, dz, sont trois accroissements constants, d'ailleurs arbitraires, attribués aux variables indépendantes x, y, z ».

Telle était à cette époque (et antérieurement) la définition généralement adoptée pour la différentielle d'une fonction de plusieurs variables (voir par exemple, la première partie de notre liste bibliographique à la fin de cet exposé). Elle supposait implicitement, l'existence des dérivées partielles au point considéré mais ne faisait aucune autre hypothèse.

Mais déjà en 1914, dans son cours d'analyse infinitésimale, de la Vallée Poussin écrit à la page V du tome I de la *troisième* édition [13] « ... nous avons abandonné l'ancienne définition de la différentielle totale et adopté celle de Stolz. La supériorité de cette définition a été mise en lumière par les travaux de M. M. S. Pierpont, Fréchet et surtout W. H. Young. Elle est indiscutable: les théorèmes découlant plus directement des principes, la théorie de la différentiation des fonctions explicites et implicites devient plus serrée et, par le fait, plus satisfaisante ». Cette définition est d'ailleurs rappelée à la page 140 du même tome. Les mêmes avantages s'appliquent aux autres définitions que nous rappellerons plus loin, puisqu'elles sont équivalentes à celle de Stolz.

Deuxième Section

Définitions modernes de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au domaine des fonctions numériques de deux variables numériques, le cas de plus de deux variables numériques pouvant être traité de la même façon.

Autrefois, la définition théorique de la différentiabilité de $f(x, y)$ en un point, consistait dans l'hypothèse de l'existence des deux dérivées partielles en ce point. Pratiquement, pour établir un parallélisme des propriétés de la différentielle entre le cas d'une et celui de plusieurs variables, on faisait généralement l'hypothèse H définie ci-dessous. Les définitions modernes (qui vont suivre) de la différentiabilité (pour plusieurs variables) se placent entre ces deux extrêmes. Comme on le verra plus loin, elles sont moins générales que la définition théorique antérieure et plus générales que la définition pratique antérieure. Le gain acquis par les définitions modernes consiste en ce que, comme la définition pratique antérieure (voir pages 180-181, et 207) plus étroite, elles réalisent le parallélisme cherché, ce que ne faisait pas la définition théorique antérieure.

Considérons d'abord l'exemple A de la page 213; $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, (avec $f(o, o) = o$), a bien ses deux dérivées partielles à