

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ
Kapitel: Troisième Section Equivalence des quatre définitions de la différentielle
Autor: Fréchet, Maurice
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39417>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \rightarrow \lambda \quad \text{quand } x \rightarrow a .$$

Autrement dit, quand $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte, par rapport à a , elle a aussi une dérivée partielle au sens ordinaire par rapport à a et la première est égale à la seconde f'_a .

On dira de même que $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte par rapport à y , si le rapport

$$\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} \tag{20}$$

a une limite quand $(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$ de sorte que $\left| \frac{x - a}{y - b} \right|$ reste bornée. Et alors $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_b au sens ordinaire au point (a, b) et le rapport (20) tend vers f'_b .

Ceci étant, nous dirons que $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) au sens de Severi, si en ce point, $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles restreintes par rapport à x et y . Et alors la différentielle de $f(x, y)$ au point (a, b) au sens de Severi sera encore

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y . \tag{19}$$

TROISIÈME SECTION

Equivalence des quatre définitions de la différentielle

Les quatre définitions précédentes de la différentielle d'une fonction $f(x, y)$ en un point (a, b) quoique différentes dans la forme présentent cependant dans cette même forme deux traits communs.

D'une part, ou bien elles présupposent l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b) , ou bien cette existence résulte-t-elle directement de la définition.

D'autre part, toutes ces définitions conduisent à la même expression de la différentielle :

$$df(x, y) = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y .$$

Les différences entre les quatre définitions de la différentielle se réduisent donc aux différences entre les définitions de la différentiabilité. C'est donc celles-ci qu'il nous suffira de comparer pour conclure qu'elles sont équivalentes.

*Equivalence des quatre définitions
de la différentiabilité*

I — Comparons, par exemple, la définition de Stolz, à celle de Hadamard. Si, au point (a, b) , $f(x, y)$ est différentiable au sens de Stolz, on aura :

$$\Delta f = (f'_a + \varepsilon) \Delta x + (f'_b + \varepsilon') \Delta y$$

avec $\lim_{\Delta x^2 + \Delta y^2 \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{Bmatrix} = 0 .$

Donc si $x(t), y(t)$ sont des fonctions de t dérivables et respectivement égales à a et b pour $t = \alpha$, on aura

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(a, b)}{\Delta t} = (f'_a + \varepsilon) \frac{\Delta x}{\Delta t} + (f'_b + \varepsilon') \frac{\Delta y}{\Delta t} .$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ tendent vers $x'(\alpha), y'(\alpha)$, donc Δx et Δy tendent vers zéro et par suite aussi ε et ε' . Dès lors, le second membre tend vers

$$f'_a x'_t + f'_b y'_t ; \tag{21}$$

donc aussi le premier.

Par suite, $f(x(t), y(t))$ est dérivable pour $t = \alpha$ et sa dérivée est égale à (21). C'est à dire que toute fonction différentiable au sens de Stolz l'est aussi au sens d'Hadamard.

La démonstration de la réciproque est moins simple. Nous considérons une fonction $f(x, y)$ différentiable au sens d'Hadamard au point (a, b) . C'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$df(x(t), y(t)) = Ax'_t + By'_t \quad (22)$$

pour la valeur de t considérée, soit $t = \alpha$. Il suffit de montrer qu'on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{r} \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(a, b) - A\Delta x - B\Delta y}{r} \equiv 0 \quad (22bis)$$

en posant :

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

A cet effet, nous allons montrer qu'on arrive à une contradiction si l'on suppose que $\frac{R}{r}$ ne tend pas vers zéro et que par conséquent, il existe une suite de points (x_n, y_n) correspondant aux valeurs $\Delta_n x, \Delta_n y, r_n, R_n$ de $\Delta x, \Delta y, r, R$ telles que $\left| \frac{R_n}{r_n} \right|$ reste supérieur à un nombre positif fixe k , quand $r_n \rightarrow 0$.

Pour cela, admettons pour commencer qu'on puisse définir deux fonctions $x(t), y(t)$ dérivables pour $t = \alpha$ et prenant les valeurs respectives a, b, x_n, y_n , pour $t = \alpha$ et $t_n = r_n + \alpha$. On aura

$$\frac{R_n}{r_n} \equiv \frac{f(x(t_n), y(t_n)) - f(x(\alpha), y(\alpha)) - A\Delta_n x - B\Delta_n y}{r_n} \quad (23)$$

$\frac{R_n}{r_n}$ est donc la valeur pour $t = t_n$ de $\frac{R}{r}$ dans (22bis) quand on y remplace t par t_n . Et l'on a (23). Or, on a $\left| \frac{R_n}{r_n} \right| > k$ et la relation (22) qui peut s'écrire dans le cas actuel :

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(\alpha), y(\alpha))}{t - \alpha} \rightarrow \lim A \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + B \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{r} = 0,$$

d'où en particulier

$$\lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{R_n}{r_n} = 0 \quad \text{avec} \quad \left| \frac{R_n}{r_n} \right| > k > 0. \quad (24)$$

Les deux relations (24) fournissent la contradiction annoncée. Reste à démontrer l'existence des fonctions $x(t)$, $y(t)$ décrites plus haut. On a fixé d'avance les valeurs de $x(t)$, $y(t)$ pour les valeurs $t = t_n = r_n + \alpha$. Mais pour que les t_n soient distincts, on pourra ne retenir de la suite des r_n ($\neq 0$) qui tendent vers zéro qu'une suite de valeurs distinctes et même décroissantes. On a évidemment:

$$\left| \frac{x(t_n) - x(\alpha)}{r_n} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{y(t_n) - y(\alpha)}{r_n} \right| \leq 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left| \frac{x(t_n) - x(\alpha)}{t_n - \alpha} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{y(t_n) - y(\alpha)}{t_n - \alpha} \right| \leq 1. \quad (25)$$

On peut donc extraire de la nouvelle suite des t_n une suite telle que les deux premiers membres de (25) tendent vers deux limites finies respectives, λ et μ .

A cette troisième suite de valeurs de t_n correspondra une suite de points M_n , $(x(t_n), y(t_n))$ avec $t_n - t_{n+1} > 0$. Pour définir complètement $x(t)$, $y(t)$, nous les prendrons fonctions linéaires de t , de t_n à t_{n+1} égales respectivement à $x(t_n)$, $y(t_n)$ et à $x(t_{n+1})$, $y(t_{n+1})$ pour $t = t_n$ et t_{n+1} . La courbe lieu du point $x(t)$, $y(t)$ sera une ligne polygonale tendant vers le point (a, b) . Alors

$$\frac{x(t) - x(\alpha)}{t - \alpha}$$

sera une fonction homographique de t de t_n à t_{n+1} dont les valeurs resteront comprises entre ses valeurs pour $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$. Or

celles-ci tendent vers λ quand $t_n \rightarrow \alpha$. Il en résulte que $x(t)$ est bien dérivable pour $t = \alpha$; et de même pour $y(t)$.

Ainsi toute fonction $f(x, y)$ différentiable au point (a, b) au sens d'Hadamard est aussi différentiable en ce point au sens de Stolz et au mien.

En résumé, les définitions de la différentiabilité *au sens de Stolz et au sens d'Hadamard sont équivalentes.*

II—Comparons notre définition géométrique (page 191) de la différentiabilité avec notre première définition.

1^o) Supposons d'abord que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b) au sens de notre première définition. Alors on aura une relation de la forme:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon r. \quad (26)$$

$$\text{avec } r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ et } \lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Condition U—Si Γ est une courbe, lieu des points $x(t), y(t), z(t)$, qui pour $t = \alpha$, passe par le point $(a, b, c = f(a, b))$ de la surface $S: z = f(x, y)$ et qui a une tangente en ce point, on aura, d'après (26)

$$\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\Delta t} = \varepsilon \frac{r}{\Delta t}. \quad (27)$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$, le premier membre tend vers

$$z'_\alpha - Ax'_\alpha - By'_\alpha. \quad (28)$$

Dans le second: $\frac{r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \rightarrow \pm \sqrt{x'^2 + y'^2}.$

Donc le second membre de (27) tend vers zéro avec Δt et par suite

$$z'_\alpha = Ax'_\alpha + By'_\alpha.$$

Donc la tangente en Q à Γ appartient au plan P :

$$Z - c = A(X - a) + B(Y - b),$$

fixe et non parallèle à Oz .

Condition V : Inversement considérons une droite T passant par Q et contenue dans le plan P . Soient l, m, n ses coefficients directeurs. On aura (26) $Al + Bm = n$ avec $l^2 + m^2 \neq 0$. Il existe dans le plan xoy une infinité de courbes passant par le point (a, b) et tangentes à la projection T' de T sur xoy . Choisissons-en une, soit C . Il y aura donc, pour cette courbe, une représentation paramétrique où ses coordonnées $\xi(t), \eta(t)$ sont égales à a et b pour $t = \beta$ et sont dérivables pour $t = \beta$ avec $\xi'_\beta{}^2 + \eta'_\beta{}^2 \neq 0$ et

$$\frac{\xi'_\beta}{l} = \frac{\eta'_\beta}{m}. \quad (29)$$

Soit maintenant la courbe Γ de la surface S qui se projette suivant la courbe C sur xOy . Sa cote correspondant à t , sera

$$S(t) = f(\xi(t), \eta(t))$$

et en vertu de (24), on aura

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{A\Delta\xi(t) + B\Delta\eta(t)}{\Delta t} + \omega \frac{P}{\Delta t}, \quad (30)$$

où $\frac{P}{\Delta t} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta t}\right)^2}$ et $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega = 0$.

Quand $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{P}{\Delta t} \rightarrow \pm \sqrt{\xi'_\beta{}^2 + \eta'_\beta{}^2}.$$

Finalement $\omega \frac{P}{\Delta t} \rightarrow 0$. Donc d'après (30), $S(t)$ est dérivable pour $t = \beta$ et sa dérivée est

$$S'_\beta = A\xi'_\beta + B\eta'_\beta \quad (31)$$

et puisque $\sqrt{\xi'_\beta{}^2 + \eta'_\beta{}^2} \neq 0$, les trois dérivées $\xi'_\beta, \eta'_\beta, S'_\beta$ ne sont pas toutes nulles et la courbe Γ a bien une tangente au point $t = \beta$. Puisque $\frac{\xi'_\beta}{l} = \frac{\eta'_\beta}{m}$ on aura d'après (29) et (30)

$\frac{\xi'_\beta}{l} = \frac{\eta'_\beta}{m} = \frac{S'_\beta}{n}$: il y a bien une courbe Γ sur S passant par Q et tangente en Q à la droite T donnée située dans P . Dès lors les conditions U et V étant remplies par P , S a bien au point Q , un plan tangent: le plan P , non parallèle à Oz : la fonction $f(x, y)$ est bien différentiable au sens de notre définition géométrique.

2°) Inversement, supposons que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b) à notre sens géométrique. C'est-à-dire que la surface S ait au point Q , un plan tangent non parallèle à Oz , soit le plan P :

$$Z - c = A(X - a) + B(Y - b).$$

Nous voulons démontrer que $f(x, y)$ est au point Q différentiable à notre premier sens, et même, plus précisément que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f - A\Delta x - B\Delta y}{r} \right) = 0$$

avec $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$

En effet, dans le cas contraire, il existerait une borne $k > 0$ et une suite de valeurs h_n, k_n de Δx et Δy telle que en posant $\frac{R_n}{r_n} \equiv \frac{\Delta_n f - Ah_n - Bk_n}{r_n}$ où $r_n = \sqrt{h_n^2 + k_n^2}$, $\left| \frac{R_n}{r_n} \right|$ reste $> k > 0$ quand $r_n \rightarrow 0$.

Soient λ_n, μ_n, ν_n les cosinus directeurs de la droite $Q Q_n$, (Q_n ayant pour coordonnées $a+h_n, b+k_n, c+l_n = f(a+h_n, b+k_n)$).

On pourra toujours extraire de la suite σ des points de coordonnées λ_n, μ_n, ν_n (qui restent sur une sphère de rayon 1) une suite σ' qui converge vers un point de coordonnées λ, μ, ν , (avec $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$). Remplaçons la suite des Q_n par la suite correspondant à σ' . Ceci étant, considérons une courbe C du plan de xy passant par les projections des points $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \dots Q$. Sur xoy , ce sera par exemple la ligne polygonale dont les sommets sont ces projections. Ce sera la projection, C , d'une courbe Γ de la surface S . Pour celle-ci λ_n, μ_n, ν_n tendant vers λ, μ, ν , la droite $Q Q_n$ tend vers la droite δ passant par Q et de cosinus directeur λ, μ, ν . Si nous supposons, en outre (condition T), que $f(x, y)$ est continu au point Q , on voit que le point Q_n

tend vers Q et que la corde $Q Q_n$ de Γ a une limite δ . Dès lors la courbe Γ a une tangente au point Q et par hypothèse cette tangente est dans le plan P . On a donc

$$v = A\lambda + B\mu . \quad (32)$$

Mais
$$\frac{h_n}{\lambda_n} = \frac{k_n}{\mu_n} = \frac{l_n}{v_n} \equiv C_n$$

avec
$$C_n = \sqrt{h_n^2 + k_n^2 + (\Delta_n f)^2} .$$

D'où

$$\frac{R_n}{r_n} = \frac{C_n}{r_n} (v_n - A\lambda_n - B\mu_n) = \frac{C_n}{r_n} \gamma_n$$

où d'après (32), $\gamma_n \rightarrow 0$. Or

$$\frac{C_n}{r_n} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \mu_n^2 + v_n^2}{\lambda_n^2 + \mu_n^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} .$$

Si $\lambda^2 + \mu^2$ était nul, on aurait d'après (32) $v = 0$ alors que $\lambda^2 + \mu^2 + v^2 = 1$. Donc $\frac{C_n}{r_n}$ a une limite finie et $\frac{R_n}{r_n} \rightarrow 0$, alors

qu'on a supposé que $\left| \frac{R_n}{r_n} \right| > k > 0$. Il y a bien contradiction.

De 1^o, p. 201 et 2^o, p. 203, il résulte que notre définition géométrique de la différentiabilité est équivalente à notre première définition, comme à celle de Stolz.

III— Comparons enfin la définition de Severi à celle de Stolz.

1^o) Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Stolz, on a

$$f(x, y) - f(a, b) = (x-a)f'_a + (y-b)f'_b + \varepsilon(x-a) + \varepsilon_1(y-b)$$

avec $\lim \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon_1 \end{matrix} \right\} = 0$ quand $(x-a)^2 + (y-b)^2 \rightarrow 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, y) &= [f(x, y) - f(a, b)] - [f(a, y) - f(a, b)] \\ &= (x-a)(f'_a + \varepsilon) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(y-b) \end{aligned}$$

où $\varepsilon, \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ avec $(x-a)^2 + (y-b)^2$.

Donc

$$\left| \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} - f'_a \right| \leq \left| \varepsilon \right| + \left| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right| \left| \frac{y - b}{x - a} \right|.$$

Quand $(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$ de sorte que $\left| \frac{y - b}{x - a} \right|$ reste borné, le second membre tend vers zéro, donc aussi le premier. Par suite $f(x, y)$ a, au point (a, b) une dérivée partielle au sens de Severi, par rapport à x . On verrait qu'il en est de même par rapport à y . Ainsi $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Severi. Les différentielles de $f(x, y)$ au point (a, b) sont évidemment les mêmes aux deux sens.

2^o) Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Severi, écrivons

$$f(x, y) - f(a, b) = \left[\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} \right] (x - a) + \left[\frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \right] (y - b) = [f'_a + \omega] (x - a) + [f'_b + \omega'] (y - b).$$

Alors, quand $(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$ de sorte que $\left| \frac{y - b}{x - a} \right|$ reste ≤ 1 , on voit que ω et ω' tendront vers zéro. De même on peut écrire

$$f(x, y) - f(a, b) = (f'_a + \theta)(x - a) + (f'_b + \theta')(y - b)$$

avec $\lim \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta' \end{matrix} \right\} = 0$ quand $(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$ de sorte que

$$\left| \frac{x - a}{y - b} \right| < 1.$$

Dès lors on pourra écrire

$$f(x, y) - f(a, b) = (f'_a + \varepsilon)(x - a) + (f'_b + \varepsilon')(y - b)$$

avec $\lim \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{matrix} \right\} = 0$ quand $(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$, quelle que soit

la valeur du rapport entre $x - a$ et $y - b$. Autrement dit $f(x, y)$ est aussi différentiable au sens de Stolz.

Finalement, les différentiabilités aux sens de Stolz et de Severi sont équivalentes. Et les différentielles correspondantes sont égales.

Conclusion

Finalement, nous avons démontré que *les définitions de la différentielle aux quatre sens :*

d'approximation de Stolz et Fréchet,
géométrique de Fréchet,
opérationnel d'Hadamard,
analogique de Severi,

quoique de formes absolument différentes, sont équivalentes.

Pour abrégé, nous donnerons le nom générique de définition de la différentielle *au sens moderne* à chacune des définitions ci-dessus.

QUATRIÈME SECTION

Parallélisme entre le cas d'une variable et celui de plusieurs variables pour les propriétés de la différentielle sous sa forme moderne.

Nous rappellerons d'abord les propriétés de la différentielle dans les deux cas d'une ou de plusieurs variables en renvoyant le lecteur pour les démonstrations aux traités récents qui utilisent les définitions modernes (nous indiquerons, comme exemple, les pages correspondantes de la troisième édition, 1914, du tome I du cours d'Analyse Infinitésimale [13] de la Vallée-Poussin, et du tome I, 1942 du cours d'analyse mathématique de Valiron [14]. Et nous montrerons par des exemples pour plusieurs de ces propriétés qu'elles disparaissent quand on emploie l'ancienne définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, c'est-à-dire quand on suppose seulement l'existence des dérivées partielles au point considéré.