12. Les dimensions k = 0 et k = n.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

12. Les dimensions $k = 0$ et $k = n$.

Nous allons entamer l'étude de quelques dimensions k particulières dans l'espace n-dimensionnel. Nous commençons ici par $k = 0$ et $k = n$. Rappelons les conventions qui s'y rapportent.

Un k-vecteur se réduit à une quantité scalaire pour $k = 0$, pseudo-scalaire pour $k = n$. Dans les deux cas, sa direction se réduit au signe $+$ ou $-$. Un intégrant $f(x, j)$ quelconque est donc donné par une paire de fonctions

$$(12.1) \qquad f_+(x) = f(x, +)\ , \qquad f_-(x) = f(x, -)\ ;$$

il sera linéaire en j si $f_+ = -f_-$. Une variété généralisée $\mathscr{L}$ sera donnée par une représentation de la forme

$$(12.2) \qquad \mathscr{L}(f) = \int f_+ \, d\mu_+ + \int f_- \, d\mu_-\ ,$$

où μ_+, μ_- sont des mesures finies à supports compacts. Remarquons que si $\mathscr{L}$ ne possède aucune sous-variété singulière, les mesures μ_+ et μ_- auront des supports boréliens disjoints.

Il y a, cependant, des différences importantes entre les deux cas $k = 0$ et $k = n$. En effet, une quantité pseudo-scalaire se distingue nettement de la quantité scalaire, à laquelle elle est normale, par les conventions qui gouvernent la multiplication extérieure. Il ressort de ces conventions que pour $k = n$, tout intégrant linéaire est exact, tandis que pour $k = 0$ les intégrants exacts sont les intégrants linéaires constants par rapport à x.

Les dimensions $k = 0$ et $k = n$ diffèrent aussi dans la définition des polytopes, etc. Cela tient à ce que la notion de point, orienté avec le signe $+$ ou $-$, est celle de simplex de dimension 0, tandis qu'elle est toute différente de celle de simplex de dimension n. On notera qu'un σ-polytope avec poids, de dimension $k = 0$, sera défini par une fonctionnelle de la forme

$$(12.3) \qquad \mathscr{L}(f) = \Sigma\, a_\nu f_+(x_\nu) + \Sigma\, b_\nu f_-(x_\nu)\ ,$$

où $a_\nu \geqq 0$, $b_\nu \geqq 0$, $\Sigma\,(a_\nu + b_\nu) < \infty$, $\operatorname{Sup} |x_\nu| < \infty$. C'est le cas de mesures discrètes dans (12.2). Pour qu'un tel σ-polytope avec poids ait la même frontière qu'une variété généralisée donnée par (12.2), on aura à poser

$$\int d(\mu_+ - \mu_-) = \Sigma(\alpha_\nu - b_\nu)\,. \tag{12.4}$$

Ainsi, pour la dimension $k = 0$, toute variété généralisée possède une frontière A, puisqu'on peut toujours choisir un σ-polytope avec poids de façon à ce que le côté droit de (12.4) ait une valeur donnée. D'ailleurs (12.2) montre déjà que, pour la dimension $k = 0$, toute variété généralisée s'exprime comme un mélange de la forme $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$, où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est un simplex. Dans une étude complète des cas d'égalité de (8.5), ce résultat, peu intéressant en lui-même, pourra éventuellement servir de base à une démonstration inductive d'un théorème général. On conçoit aussi une induction descendante possible, en partant du résultat correspondant pour la dimension $k = n$. Nous combinons ces deux résultats en un seul énoncé:

(12.5) Point de départ: les cas dégénérés $k = 0$ et $k = n$ dans l'espace n-dimensionnel. Toute variété généralisée de dimension $k = 0$ appartient aux classes A et A_{gd}, toute variété généralisée de dimension $k = n$ et de frontière A, à la classe A_{gd}. Chacune d'elles appartiendra à la classe A_d, si elle ne possède aucune sous-variété singulière non nulle.

Démonstration. — Ce qui se rapporte à la dimension $k = 0$ se ramène aux remarques déjà faites. Reste à traiter la dimension $k = n$. Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de cette dimension, et supposons qu'elle possède la même frontière qu'un σ-polytope Π avec poids. En changeant d'orientation, on aura un σ- polytope Π^* avec poids, tel que $\mathscr{L} + \Pi^*$ soit clos. Mais alors $\mathscr{L} + \Pi^*$ sera singulier, donc $\mathscr{L}$ et Π auront le même substratum. On peut poser, d'après (11.2),

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''\,, \qquad \Pi = \Pi' + \Pi''\,,$$

où $\mathscr{L}'$, Π' sont des variétés singulières, et où $\mathscr{L}''$, Π'' sont des variétés généralisées, de même substratum, qui ne possèdent aucune sous-variété singulière non nulle. On en conclut facilement, en utilisant pour $\mathscr{L}''$ et Π'' des représentations du type (12.2), que $\mathscr{L}'' = \Pi''$, donc que $\mathscr{L}'' \in A_d$, à condition de faire appel à la remarque faite après la formule (12.2), selon laquelle les mesures μ''_+, μ''_-; qui y paraîtront lorsqu'il s'agit de représenter $\mathscr{L}''$, auront des supports boréliens disjoints. On utilisera encore cette même formule pour représenter $\mathscr{L}'$, et l'on décomposera les mesures μ'_+, μ'_- qui y paraîtront, chacune en deux parties, respectivement absolument continue et singulière par rapport à la mesure μ''_+ ou μ''_- correspondante. En faisant l'addition, on trouvera pour $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ une nouvelle représentation, d'où il ressort que $\mathscr{L} \in A_{gd}$, ce qui complète la démonstration de notre énoncé.

13. La dimension $k = n - 1$.

Nous poursuivons notre étude, mais en improvisant les démonstrations, qui déjà seront trop faibles pour nous livrer l'égalité vraisemblable $A_{gd} = \partial^{-1} \partial A$. Il nous manque une méthode générale, il nous manque aussi, même pour $k = n - 1$, une méthode qui conduirait au résultat le plus précis. Cependant, comme nous l'avons dit dans notre introduction, le résultat que nous allons démontrer ici, pour $k = n - 1$, est toujours un théorème de nature progressive. Sa démonstration se basera sur celle que nous avons présentée, il y a dix ans, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ avec M. Fleming [9, 5].

(13.1) *Théorème.* — Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de dimension $n - 1$ et de frontière A. Alors $\mathscr{L} \in A_g$.

Pour démontrer ce théorème, équivalent d'après (8.5) à l'égalité $A_g = \partial^{-1} \partial A$, nous aurons besoin de définitions et de lemmes auxiliaires.

Un polytope clos $\mathscr{P}$ sera dit irréductible s'il ne possède aucune décomposition $\mathscr{P} = \mathscr{P}' + \mathscr{P}''$, où $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ sont des polytopes clos non nuls. Une variété généralisée close $\mathscr{L}$ sera dite pure, si pour toute expression $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ de $\mathscr{L}$ comme la somme de deux variétés généralisées closes $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$, il existe dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 1$ une constante θ, telle que $\mathscr{L}' = \theta \mathscr{L}$.

Pour abréger, un polytope clos irréductible de dimension $n - 1$, et une variété généralisée close pure de la même dimension, seront dites, respectivement, polytope typique et variété typique, lorsqu'elles sont situées dans l'espace n-dimensionnel.