13. La dimension k=n—1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

appel à la remarque faite après la formule (12.2), selon laquelle les mesures μ''_+, μ''_-, qui y paraîtront lorsqu'il s'agit de représenter $\mathscr{L}''$, auront des supports boréliens disjoints. On utilisera encore cette même formule pour représenter $\mathscr{L}'$, et l'on décomposera les mesures μ'_+, μ'_- qui y paraîtront, chacune en deux parties, respectivement absolument continue et singulière par rapport à la mesure μ''_+ ou μ''_- correspondante. En faisant l'addition, on trouvera pour $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ une nouvelle représentation, d'où il ressort que $\mathscr{L} \in A_{gd}$, ce qui complète la démonstration de notre énoncé.

13. La dimension $k = n - 1$.

Nous poursuivons notre étude, mais en improvisant les démonstrations, qui déjà seront trop faibles pour nous livrer l'égalité vraisemblable $A_{gd} = \partial^{-1} \partial A$. Il nous manque une méthode générale, il nous manque aussi, même pour $k = n - 1$, une méthode qui conduirait au résultat le plus précis. Cependant, comme nous l'avons dit dans notre introduction, le résultat que nous allons démontrer ici, pour $k = n - 1$, est toujours un théorème de nature progressive. Sa démonstration se basera sur celle que nous avons présentée, il y a dix ans, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ avec M. Fleming [9, 5].

(13.1) *Théorème.* — Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de dimension $n - 1$ et de frontière A. Alors $\mathscr{L} \in A_g$.

Pour démontrer ce théorème, équivalent d'après (8.5) à l'égalité $A_g = \partial^{-1} \partial A$, nous aurons besoin de définitions et de lemmes auxiliaires.

Un polytope clos $\mathscr{P}$ sera dit irréductible s'il ne possède aucune décomposition $\mathscr{P} = \mathscr{P}' + \mathscr{P}''$, où $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ sont des polytopes clos non nuls. Une variété généralisée close $\mathscr{L}$ sera dite pure, si pour toute expression $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ de $\mathscr{L}$ comme la somme de deux variétés généralisées closes $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$, il existe dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 1$ une constante θ, telle que $\mathscr{L}' = \theta \mathscr{L}$.

Pour abréger, un polytope clos irréductible de dimension $n - 1$, et une variété généralisée close pure de la même dimension, seront dites, respectivement, polytope typique et variété typique, lorsqu'elles sont situées dans l'espace n-dimensionnel.

La notion de polytope typique nous permettra de faire appel à un théorème de séparation bien connu, tandis que celle de variété typique s'exprime très simplement par l'intermédiaire de celle de point extrême, au sens abstrait, d'un certain ensemble convexe. (Plus précisément, les variétés typiques $\mathscr{L}$ d'étendue $|\mathscr{L}| = 1$ sont les points extrêmes, au sens abstrait, de l'ensemble des variétés généralisées closes de la même étendue et de la même dimension.)

(13.2) *Lemme de séparation.* — Soit $\mathscr{P}$ un polytope typique situé dans une boule de diamètre unité, et soit Π un hyperplan. Alors il existe un polytope singulier S, situé dans Π et d'étendue $\leqq 2$, tel que l'on ait $\mathscr{P} + S = \mathscr{P}' + \mathscr{P}''$, où $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ sont des polytopes clos, situés de part et d'autre de Π.

(13.3) *Lemme d'approximation.* — Toute variété typique $\mathscr{L}$ s'exprime sous la forme $\mathscr{L} = \lim c_\nu \mathscr{P}_\nu$ où c_ν est une constante positive et $\mathscr{P}_\nu$ un polytope typique.

(13.4) *Lemme de convexité* — Toute variété généralisée close, de dimension $n - 1$ dans l'espace n-dimensionnel, s'exprime sous la forme d'un mélange $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$, où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est une variété typique.

Démonstrations des lemmes. — Pour établir (13.2), soit C le périmètre de la partie de $\mathscr{P}$ dans un des demi-espaces ouverts bornés par Π. Il suffira de montrer que C est le périmètre d'un polytope Q situé dans Π et d'étendue $\leqq 1$; car en ajoutant à Q le polytope d'orientation opposé, on obtiendra un polytope singulier S avec les propriétés énoncées. Pour obtenir un tel polytope Q, il suffit de couper par Π le domaine polytopique V orienté, lequel est situé dans la boule donnée et possède la frontière orientée $\mathscr{P}$. L'existence et l'unicité de V sont des conséquences immédiates d'un théorème de séparation, connu des topologues [1, p. 380], et qui se démontre très simplement en utilisant l'homotopie, de sorte qu'il est devenu un exercice pour les étudiants. L'orientation de Q se détermine par la méthode des contours [11].

Pour établir (13.3), on fera appel à [12, (1.1) ThA] pour exprimer d'abord $\mathscr{L}$ sous la forme $\mathscr{L} = \lim \mathscr{L}_\nu$ où $\mathscr{L}_\nu$ est un polytope clos avec poids. (Voir les remarques qui suivent l'énoncé du théorème cité.) $\mathscr{L}_\nu$ s'exprime donc, d'après la topologie combinatoire, comme une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de polytopes clos [4 (3.3) lemma] et par conséquent, comme une telle combinaison linéaire de polytopes typiques. En s'appuyant sur un résultat facile de la théorie des points extrêmes [p. ex. 4, A1, p. 482] on en tire que $\mathscr{L}/|\mathscr{L}| = \lim \mathscr{P}_\nu/|\mathscr{P}_\nu|$ pour une suite convenable de polytopes typiques $\mathscr{P}_\nu$, ce qui conduit immédiatement à l'énoncé (13.3).

Pour établir (13.4), on fera appel de nouveau à la théorie des points extrêmes [p. ex. 2, (4.2)] pour exprimer la variété généralisée donnée, qu'on peut supposer d'étendue unité, comme un mélange, par rapport à une mesure unité, des $\mathscr{L}_\alpha/|\mathscr{L}_\alpha|$. Notre énoncé sera une conséquence immédiate.

Des lemmes (13.2), (13.3) nous déduirons:

(13.5) *Théorème.* — Toute variété typique non singulière s'exprime sous la forme $c\mathscr{L}$ où c est une constante positive, et où $\mathscr{L}$ est une variété greffée close.

Démonstration. — Ainsi que nous l'avons dit au paragraphe 7, les variétés greffées coïncident avec ce que nous avons appelé précédemment variétés généralisées admissibles B dans [12], et en particulier les variétés greffées closes sont les limites des polytopes clos. Il suffira donc de montrer qu'une variété typique non singulière aura la forme $c \lim \mathscr{P}_\nu$, où les $\mathscr{P}_\nu$ sont des polytopes clos. Or c'est une conséquence immédiate du lemme (13.3), dans le cas où les constantes c_ν ont une limite c finie et non nulle, pour une sous-suite de valeurs de ν. Il en est de même si les c_ν tendent vers l'infini, puisqu'on peut alors les supposer entiers. Il suffira donc de montrer qu'une variété typique de la forme $\lim c_\nu \mathscr{P}_\nu$, où $\lim c_\nu = 0$ et où les $\mathscr{P}_\nu$ sont des polytopes typiques, sera singulière. Par conséquent il suffira de montrer que son support se réduit à un seul point. Nous supposons le contraire, et nous établirons une contradiction. A cet effet, soit Π un hyperplan quelconque, et choisissons, d'après (13.2), pour chaque ν un polytope singulier S_ν d'étendue $\leqq 2$, tel que l'on ait $\mathscr{P}_\nu + S_\nu = \mathscr{P}'_\nu + \mathscr{P}''_\nu$, où $\mathscr{P}'_\nu$, $\mathscr{P}''_\nu$ sont des polytopes clos, situés de part et d'autre de Π. On trouve, puisque $\lim c_\nu = 0$,

$$\lim c_\nu \mathscr{P}_\nu = \lim c_\nu (\mathscr{P}_\nu + S_\nu) = \lim c_\nu \mathscr{P}'_\nu + c_\nu \mathscr{P}''_\nu\,.$$

En prenant une sous-suite de ν, on trouve donc que notre variété typique se décompose en deux parties closes, données par les limites de $c_\nu \mathscr{P}'_\nu$ et $c_\nu \mathscr{P}''_\nu$, et situées de part et d'autre de Π. L'une d'elles sera donc nulle, ce qui n'est possible, Π étant arbitraire, que si notre variété typique a pour support un seul point.

Du résultat ainsi démontré, il s'en suit, d'après (13.4), que:

(13.6) *Théorème.* — Toute variété généralisée close, de dimension $n-1$ dans l'espace n-dimensionnel, s'exprime sous la forme d'un mélange $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$ où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est une variété greffée close.

A proprement parler, ce qu'on déduit par la voie indiquée, c'est que la variété en question s'exprime comme la somme d'un tel mélange et d'une variété singulière. Mais cela revient au même, puisqu'une variété singulière est elle-même une variété greffée.

Du théorème (13.6), on passe maintenant au théorème (13.1), en raisonnant tout comme à la fin du paragraphe 11. Le théorème (13.1) est donc établi, lui aussi.

14. La dimension $k = 1$.

Nous avons laissé pour la fin le cas, intéressant pour la mécanique des fluides, où la dimension de nos variétés est $k = 1$. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, ce cas n'a été traité précédemment que pour $n = 2$, quand il se réduit à celui que nous venons de discuter. Or, déjà pour $n = 3$, la voie suivie ne s'applique plus lorsque $k = 1$. En effet, l'énoncé analogue à (13.6) est faux, comme il ressort d'un exemple très simple, dû à M. E. Bishop.

On soumet à une rotation, croissante de 0 à 2π, un cercle donné, par rapport à un axe, dans son plan, qui ne le coupe pas. Les positions successives θ du cercle engendrent un tore Θ, et nous désignons par $v(x)$ une direction qui, pour $x \in \Theta$, est tangente à Θ au point x, et qui y fait un angle constant, irrationnel à π, avec la position du cercle θ passant par le même point. Nous définissons

$$\mathscr{L}(f) = \int_\Theta f[x, v(x)] \, da ,$$