1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

par J. Steinig

1. Introduction

On sait que les hauteurs $(h) = (h_1, h_2, h_3)$ d'un triangle et les rayons $(r) = (r_1, r_2, r_3)$ de ses cercles exinscrits sont liés par la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \tag{1}$$

qui peut s'écrire aussi

$$M_{-1}(h) = M_{-1}(r).$$

$M_u(x)$ désigne ici la moyenne d'ordre u des nombres réels positifs $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par

$$M_u(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^u\right)^{1/u} & \textit{pour } u \neq 0 \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} & \textit{pour } u = 0\,; \end{cases}$$

c'est une fonction continue et croissante de u sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

M. A. Mąkowski a donné une généralisation de (1) en démontrant dans [1] les inégalités

$$\begin{cases} M_u(h) \leqq M_u(r) \ \textit{pour } u > -1 \\ M_u(h) \geqq M_u(r) \ \textit{pour } u < -1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Nous nous proposons de démontrer ici quelques autres résultats du même genre à l'aide de l'inégalité de Karamata.

2. L'inégalité de Karamata

Rappelons brièvement en quoi consiste cette inégalité. Si les nombres réels $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x') = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ satisfont aux trois conditions

$$\text{(I)} \quad x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \;,\; x'_1 \geqq x'_2 \geqq \ldots \geqq x'_n ,$$

$$\text{(II)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu \leqq x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_\nu \, (1 \leqq \nu < n) ,$$

$$\text{(III)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n ,$$

nous dirons avec les auteurs de [2] que (x') majore (x), et écrirons $(x) \prec (x')$.

M. J. Karamata a démontré [3] que si $(x) \prec (x')$, alors

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) + \ldots + \phi(x_n) \leqq \phi(x'_1) + \phi(x'_2) + \ldots + \phi(x'_n) \quad (3)$$

pour toute fonction ϕ continue et convexe dans un intervalle comprenant (x) et (x'). Si ϕ est deux fois dérivable et $\phi'' > 0$, il n'y a égalité dans (3) que lorsque $(x) \equiv (x')$. L'inégalité (3) est évidemment renversée si ϕ est concave, car $-\phi$ est alors convexe.

M. M. Petrović a montré dans [4] que si la fonction $f(x)$ possède au voisinage de $x = 0$ un développement en série de puissances $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, avec $a_k \geqq 0$ pour $k \geqq 2$, alors

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leqq f(x_1 + x_2 + x_3) + 2f(0) ,$$

et M. le Professeur Karamata nous a indiqué que c'est précisément la lecture de cet article qui lui donna l'idée de l'inégalité (3).

3. Quelques applications

Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle quelconque et a_i le côté opposé au sommet A_i, alors que m_i désigne la médiane passant par A_i et r_i le rayon du cercle exinscrit tangent à a_i.