

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: Des réserves philosophiques
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 12.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

des mêmes lignes, il faisait paraître la première des Notes *mémorables* par lesquelles il fondait, sept ans avant von Neumann, la théorie des jeux psychologiques (dont l'invention était, il y a peu de temps encore, faussement attribuée à von Neumann) ¹⁾.

Ici, il ne s'agit même plus de perfectionnement ou de franchissement d'un point mort, il s'agit de la création d'une notion tout à fait nouvelle, de l'entrée dans un monde entièrement nouveau, à savoir de l'introduction et de l'utilisation efficace des mathématiques dans un domaine: le domaine psychologique, qui paraissait inaccessible aux mathématiciens.

DES RÉSERVES PHILOSOPHIQUES

Nous avons apporté, dans ce qui précède, une adhésion enthousiaste aux diverses idées de Borel que nous venons de présenter. Si l'on y ajoute l'essentiel, c'est-à-dire les résultats et les méthodes nouvelles qui seront résumés dans la Troisième Partie, on ne peut s'empêcher de ressentir une vive admiration devant cet ensemble. *Emile Borel restera un des plus grands mathématiciens de son époque*, pourtant riche en très grands talents mathématiques.

Mais, si un résultat mathématique ne peut être que vrai ou faux, il n'en est pas de même des considérations qui l'accompagnent. En Philosophie des sciences, on peut soutenir des opinions opposées, ou qui paraissent opposées, sans qu'on puisse toujours affirmer que l'une est vraie et l'autre fausse.

On sait, par exemple, qu'un mathématicien aussi éminent que M. Hadamard, s'est trouvé parfois en désaccord avec les points de vue développés par Borel concernant les fondements des mathématiques. C'est pourquoi, il nous a paru utile de présenter, après les citations de Borel qui vont suivre, les objections qui viennent naturellement à l'esprit et auxquelles, d'ailleurs, nous répondrons en partie nous-même, à la page 38.

Nous avons reproduit plus haut, pages 28 et 29, des citations de Borel où il fait ressortir avec raison l'intérêt et l'utilité

¹⁾ Aussi avons-nous cru utile de reproduire les courtes notes consacrées par Borel à ce sujet, avec un commentaire, d'abord en traduction anglaise, dans *Econometrica*, puis en français dans la *Revue d'économie politique*.

des trois notions de fini, de calculable et d'effectivement défini. Nous avons préféré séparer de ces citations, d'autres citations (qui vont suivre) où, abondant encore dans le même sens, il semble, en outre, jeter un doute sur la légitimité des notions d'abstraction et d'infini. En d'autres termes, Borel ne se contente pas de recommander les définitions constructives, il critique les définitions descriptives. Pour que le lecteur pénètre bien la pensée de Borel, nous avons cité de très larges extraits écrits en ce sens. Ces extraits ne rencontreront peut-être pas une adhésion aussi unanime que les précédents. Nous exposerons donc à la suite, les quelques objections qui se présentent naturellement à l'esprit. Pour en faciliter la lecture, nous avons distingué par des lettres capitales A, B, C..., les différentes citations de Borel qui seront mises en question. Nous serions heureux si quelque lecteur, d'accord avec les idées de Borel, sur ces points, pouvait nous écrire pour réfuter les objections qui vont suivre.

Parmi les idées générales qui dominent l'œuvre de Borel, l'une de celles qui lui tiennent le plus à cœur est celle qu'il exprime, par exemple, sous la forme suivante :

A) Si l'on me demandait de caractériser par un trait commun la méthode que j'ai appliquée... [c']est un souci constant d'étudier les êtres mathématiques en eux-mêmes, comme le biologiste étudie les êtres vivants, de me familiariser avec eux et de ne pas me laisser influencer dans cette étude intrinsèque des individus par les préjugés et les traditions.

Cette méthode de travail m'a conduit à une conception réaliste des mathématiques qui distingue les êtres mathématiques pouvant être effectivement définis ¹⁾ de ceux dont l'existence est purement hypothétique.

B) Cauchy n'a jamais, à ma connaissance, exposé explicitement ce qu'il entendait par une fonction, ... pour lui, cette question ne se posait pas, « fonction » était le terme général qu'il employait pour désigner l'une quelconque des fonctions particulières considérées par les analystes, chacune de ces fonctions particulières ayant sa définition propre, à partir des fonctions élémentaires (au moyen de séries, d'intégrales, d'équations différentielles, etc.); il est sous-entendu que les raisonnements faits sur la « fonction » en général, s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes

¹⁾ Le sens de cette expression est précisé par Borel dans la citation de la p. 29.

ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés (propriétés qui consistent le plus souvent en la continuité de la fonction et de sa dérivée).

C'est ainsi qu'un biologiste peut parler d'un « être vivant » ou un chimiste d'un « corps simple » sans avoir été obligé de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ou du corps simple en soi; ils pensent simplement aux êtres vivants, aux corps simples, qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître.

On a opposé à cette manière de voir de Cauchy, la méthode, en apparence plus générale, qui consiste à se donner la fonction *a priori* comme une correspondance qui n'a pas besoin d'être formulée explicitement pour être conçue... Ce n'est pas ici le lieu de discuter si ce qui ne peut pas être formulé peut être réellement objet de science. Deux remarques nous suffiront: d'une part cette conception plus générale de la fonction a conduit à construire et à étudier des fonctions auxquelles on n'eût, sans doute, pas songé sans elle; elle a donc été utile. Mais, d'autre part, cette construction effective d'expressions analytiques représentant les fonctions conçues a eu pour résultat de rendre désormais inutile la conception *a priori* de la fonction; après un détour, on revient, *en fait*, au point de vue de Cauchy; on est simplement plus renseigné que ne l'était Cauchy sur l'infinie variété des fonctions que l'on peut obtenir en combinant les moyens analytiques que Cauchy connaissait. Le progrès réalisé par le retour aux idées de Cauchy est cependant très grand; car on possède, pour classer cette infinie variété, une base solide qui faisait défaut dans la conception purement abstraite; cette base, c'est l'étude systématique des procédés de construction à partir des éléments.

C) Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe *exister*) dans le continu géométrique des éléments qui ne peuvent être définis: tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de M. Georg Cantor: le continu n'est pas dénombrable. Le jour où ces éléments *indéfinissables* seraient réellement mis à part et où l'on ne prétendrait point les faire intervenir plus ou moins implicitement, il en résulterait certainement une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse.

D) Beaucoup d'analystes... mettent au premier rang la notion du continu; c'est elle qui intervient d'une manière plus ou moins explicite dans leurs raisonnements. J'ai indiqué récemment en quoi cette notion du continu considérée comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne effectivement dans nos raisonnements. Il est clair, en effet, que l'ensemble des éléments analytiques susceptibles d'être réellement définis et considérés ne peut être qu'un ensemble dénombrable, je

crois que ce point de vue s'imposera de plus en plus aux mathématiciens et que le continu n'aura été qu'un instrument transitoire, dont l'utilité actuelle n'est pas négligeable... mais qui devra être regardé seulement comme un moyen d'étudier les ensembles dénombrables, lesquels constituent la seule réalité que nous puissions atteindre.

LES OBJECTIONS POSSIBLES

Déjà dans A (et aussi dans B), considérons, pour prendre le cas le plus simple, son exemple du biologiste. Selon Borel, en parlant d'un être vivant, les biologistes « pensent simplement aux êtres vivants qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître » ... « sans être obligés de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ». Si ce biologiste entre dans un pays nouveau, qu'il y rencontre: une montagne, un lac, un lion, etc., comment ne risquera-t-il pas de classer la montagne dans les êtres vivants, s'il n'a pas, *avant* d'entrer dans ce pays, une conception *a priori* des êtres vivants. Cette conception, il n'est pas nécessaire qu'elle soit innée, ni définitive, elle lui sera, sans doute, suggérée par les différences qu'il voit entre les êtres vivants qu'il connaît et les choses sans vie qu'il connaît aussi. Mais il faut qu'il se soit ensuite imposé à lui-même une telle discrimination, pour pouvoir l'appliquer plus tard aux éléments naturels qu'il rencontre.

De même, quoique dans un domaine tout autre, abordé dans B, il semble, d'après Borel, qu'après avoir étudié certaines fonctions particulières, on saura, en rencontrant de nouvelles entités mathématiques, si ce sont ou non, d'autres fonctions particulières, sans avoir *a priori* la notion générale de fonction. Un mathématicien rencontrera des égalités, des cercles, des inégalités, des sommes, des intégrales, etc. Comment saura-t-il distinguer, parmi ces éléments, ceux qui sont des fonctions, qu'il ne connaissait pas encore, sans avoir décidé au moins provisoirement, à l'avance, ce que c'est qu'une fonction ? S'il l'a décidé, il pourra, d'après Borel lui-même (B) appliquer à ces nouvelles fonctions particulières « les raisonnements faits sur « la fonction » en général ». S'il n'a rien décidé, il devra recommencer aveuglément ces raisonnements sur chaque nouvelle fonction particulière.