Arithmétique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

principal organisateur. C'est sans doute son contact, à cette époque, avec des problèmes de physique mathématique et de calcul des probabilités qui l'intéressa à ces questions et détermina son orientation nouvelle.

C'est à ces deux domaines qu'il va consacrer la plupart de ses recherches à partir de 1920. Toutefois, deux correctifs doivent être apportés à cette répartition sommaire. Il n'y a pas eu mutation brusque. Dès avant la guerre, on voit Borel s'intéresser de plus en plus aux questions de probabilités, en commençant par une courte note de cinq pages en 1905. La probabilité qu'un point aléatoire (dont la loi de probabilité sur le segment (0,1) est uniforme) appartienne à un ensemble donné, est évidemment égale à la mesure de cet ensemble. Les travaux de Borel sur la mesure lui ont montré que certains énoncés, certaines démonstrations concernant la mesure, deviennent plus instructifs et plus simples dans le langage des probabilités. Cette remarque n'est-elle pas à l'origine de l'intérêt qu'il avait pris dès avant la guerre pour le calcul des probabilités?

Le second correctif consiste en ce qu'après la guerre de 1914-19, s'il ne s'est plus occupé exclusivement de théorie des fonctions, il ne cessa pas cependant de s'y intéresser, pour prolonger, soit ses propres recherches, soit celles qu'elles avaient suscitées.

Nous examinerons maintenant plus en détail ses recherches dans les différents domaines.

Nous suivrons l'ordre chronologique seulement pour chaque domaine scientifique pris isolément et même, dans ce cas, sans nous y conformer toujours strictement.

Arithmétique

Nous parlerons plus loin de la théorie de la mesure de Borel. En vertu de cette théorie, on est amené à considérer l'ensemble des nombres rationnels comme moins serré que l'ensemble des nombres irrationnels. Or on parvient par des démarches naturelles plus simplement aux premiers nombres qu'aux seconds.

On peut alors considérer comme une généralisation de cette remarque, un résultat de Borel qu'il serait long d'énoncer de façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit: les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50] [1]), une méthode pour résoudre le problème suivant:

Etant donnés un polynome à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire p, trouver la puissance la plus élevée p^n de p qui divise le polynome pour toutes les valeurs entières de la variable.

Séries Numériques

I. *Comparaison des convergences*

Considérons deux séries convergentes à termes positifs $s = \Sigma u_n$, $t = \Sigma v_n$ et désignons par $r_n = s - s_n$, $\rho_n = t - t_n$ leurs restes de rang n.

Borel dit que la série s converge plus rapidement que la série t si $\frac{\rho_n}{r_n} \to \infty$ avec n. Nous dirions plutôt dans ce cas que s converge *beaucoup* plus rapidement que t. Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que s converge plus rapidement que t quand la plus petite limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de Σu_n, elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série, $\Sigma u'_n$, obtenue en rangeant les termes de Σu_n par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que Σu_n. Nous avons même pu donner un exemple [2]), où en

---

[1]) Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

[2]) C. R. du 27 février 1961.