

# I. Comparaison des convergences

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit: les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50]<sup>1)</sup>, une méthode pour résoudre le problème suivant:

Etant donné un polynôme à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire  $p$ , trouver la puissance la plus élevée  $p^n$  de  $p$  qui divise le polynôme pour toutes les valeurs entières de la variable.

## SÉRIES NUMÉRIQUES

### I. Comparaison des convergences

Considérons deux séries convergentes à termes positifs  $s = \sum u_n$ ,  $t = \sum \rho_n$  et désignons par  $r_n = s - s_n$ ,  $\rho_n = t - t_n$  leurs restes de rang  $n$ .

Borel dit que la série  $s$  converge plus rapidement que la série  $t$  si  $\frac{\rho_n}{r_n} \rightarrow \infty$  avec  $n$ . Nous dirions plutôt dans ce cas que  $s$  converge *beaucoup* plus rapidement que  $t$ . Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que  $s$  converge plus rapidement que  $t$  quand la plus petite limite de  $\frac{\rho_n}{r_n}$  est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de  $\sum u_n$ , elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série,  $\sum u'_n$ , obtenue en rangeant les termes de  $\sum u_n$  par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que  $\sum u_n$ . Nous avons même pu donner un exemple<sup>2)</sup>, où en

<sup>1)</sup> Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

<sup>2)</sup> C. R. du 27 février 1961.

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que  $\Sigma u'_n$ .

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles  $s_n$  sont, pour une suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^n$  et pour une autre suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^{e^n}$ .

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série  $s$  converge plus rapidement que la série  $t$ ; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation:  $\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$  (exprimant qu'on n'a pas:  $\text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s$ ) n'est pas transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

## II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang  $m$ ) par le déplacement maximum des termes qui le précèdent, tende vers zéro avec  $\frac{1}{m}$ .

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

n'était traditionnellement valable que pour  $|x| < 1$ , c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.