

# Mesure des ensembles

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Borel démontre alors deux théorèmes qui sont fondamentaux pour la théorie des fonctions :

I. Si tous les points d'un ensemble borné et fermé sont intérieurs chacun à l'un au moins des ensembles élémentaires  $F_1, F_2, \dots$ , ils sont intérieurs chacun à l'un au moins d'un nombre fini fixe ( $F_{r_1}, F_{r_2}, \dots F_{r_s}$ ) des ensembles  $F_n$ .

II. Soit  $E$  un ensemble borélien et  $\varepsilon > 0$ . On peut rassembler un nombre fini d'ensembles élémentaires  $I_1, \dots I_n$  tel que l'ensemble des points de  $E$  qui n'appartiennent à aucun des  $I_r$  et des points des  $I_r$  qui n'appartiennent pas à  $E$  soit compris à l'intérieur de la réunion d'ensembles élémentaires en nombre fini dont l'étendue totale est  $< \varepsilon$ .

## MESURE DES ENSEMBLES

La découverte d'une définition satisfaisante de la mesure d'un ensemble a joué un rôle capital dans l'élaboration des nouvelles théories développées par Borel et ses disciples ou successeurs.

Après avoir exprimé la notion intuitive de la mesure par la longueur d'un segment rectiligne, par l'aire d'un polygone, par le volume d'un polyèdre, etc. ..., les mathématiciens se sont efforcés de traduire cette notion intuitive dans le cas plus général de la mesure d'un ensemble euclidien (en commençant par le cas d'un ensemble linéaire). Des définitions à cet effet ont été progressivement proposées, entre autres par Riemann, Cantor, Darboux et Jordan. Un nouveau progrès était nécessaire.

Chaque progrès avait consisté à estimer la mesure d'un ensemble  $E$  au moyen de la longueur totale d'un ensemble d'intervalles couvrant  $E$ . Mais on avait toujours pris ces intervalles parmi des intervalles choisis d'avance. Borel a écrit lui-même que son point de départ a été de prendre, pour chaque ensemble, des intervalles non seulement couvrant l'ensemble mais dépendant directement de cet ensemble. En prenant comme intervalles ceux qu'on obtient en divisant un segment en parties égales, Jordan arrivait à la conclusion que l'ensemble

$R$  des points d'abscisse rationnelle entre 0 et 1 avait pour mesure l'unité. En attachant, avec Borel, à chaque point d'abscisse rationnelle,  $r_n$ , un segment de longueur  $\frac{\varepsilon}{n^2}$ , on constate que  $R$  est couvert par un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est  $\varepsilon \sum \frac{1}{n^2}$  ; sa mesure devant intuitivement être inférieure à ce total est aussi petite que l'on veut avec  $\varepsilon$ . Borel arrivait ainsi à cette conclusion qui, à l'époque, a paru surprenante, que l'ensemble des nombres rationnels, pourtant dense partout, était de mesure nulle. C'est par cet exemple que Borel a été conduit à la notion générale de mesure.

Les définitions actuellement en usage sont celles de Borel et de Lebesgue. La mesure de Borel ne s'appliquerait qu'au cas d'un ensemble dit mesurable  $B$  (on a défini plus haut, p. 52, les ensembles boréliens).

La mesure d'un ensemble mesurable  $B$  s'obtient au moyen des opérations mêmes par lesquelles il a été défini plus haut, la mesure d'un intervalle étant prise égale à sa longueur.

Lebesgue a donné une définition de la mesure d'un ensemble, qui garde un sens, que l'ensemble soit ou non mesurable  $B$ . Mais quand l'ensemble est mesurable  $B$ , il est aussi mesurable au sens de Lebesgue et a même mesure dans les deux sens.

En réalité, ce qu'il y a de curieux dans le cas de la définition de la mesure, c'est que Borel a commencé son étude de la mesure, précisément en donnant une définition des ensembles de mesure nulle <sup>1)</sup>, qui est valable pour des ensembles non mesurables  $B$ . Tout ensemble mesurable au sens de Lebesgue étant la réunion d'un ensemble mesurable  $B$  et d'un ensemble de mesure nulle, on peut dire que Borel avait donné implicitement *d'avance*, une définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, équivalente à la définition de Lebesgue. On peut le voir même encore mieux et d'une façon plus directe. Car, d'après M. Denjoy, Borel écrit en substance: Si un ensemble  $E$  contient un ensemble mesurable  $B$ ,  $E_2$ , de mesure  $\alpha$ , la mesure de  $E$  est au moins égale

---

<sup>1)</sup> Rappelons qu'un ensemble linéaire est de mesure nulle quand pour tout  $\varepsilon > 0$ , tous ses points sont chacun intérieur à l'un au moins d'un ensemble de segments  $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$  dont la somme des longueurs est  $< \varepsilon$ .

à  $\alpha$ . Si  $E$  est contenu dans un ensemble  $E_2$ , mesurable  $B$  de mesure  $\beta$ , la mesure de  $E$  est au plus égale à  $\beta$ . Dans le cas où  $\beta = \alpha$  la mesure de  $E$  sera  $\geq \alpha$  et  $\leq \alpha$ . De là, à dire que si  $\beta = \alpha$  la mesure de  $E$  vaut  $\alpha$ , il n'y a qu'un pas. Lebesgue le franchit. On peut se demander pourquoi Borel n'a pas franchi ce pas lui-même. Nous pensons que cela tient à ce qu'il veut, très consciemment, éliminer les ensembles qui ne sont pas « bien définis », et que pour lui, les autres ne relevant pas d'une définition constructive, sont sans existence réelle.

Nous avons dit plus haut que si les définitions constructives sont, en effet, plus complètes, et sont nécessaires pour les applications, nous ne voyons pas de raison d'éliminer les définitions descriptives qui rendent généralement plus simples les démonstrations <sup>1)</sup>.

C'est à ce point de vue que, tout en attribuant à Borel l'antériorité complète pour la notion de mesure, nous pensons que la définition de Lebesgue, d'ailleurs donnée d'une façon différente et intéressante, a déterminé un nouveau progrès.

Toutefois, il faut observer que les propriétés des ensembles mesurables  $B$  se conservent dans toute homéomorphie, ce qui n'est pas le cas des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

C'est pourquoi en Calcul des Probabilités, les ensembles « probabilisables » sont les ensembles « boréliens » et non les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

### *Exemples d'applications*

I. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $E$  soit de mesure nulle est qu'il existe une suite d'intervalles distincts  $I_1, I_2, \dots$  dont la série des longueurs est convergente et telle que tout point de  $E$  soit intérieur à une infinité des intervalles  $I_n$ .

---

<sup>1)</sup> Il faut d'ailleurs noter que l'opposition de Borel aux définitions descriptives n'a pas été totale. On lit, par exemple, en note <sup>1)</sup> de la page 48, de la troisième édition de ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*: « Le procédé que nous avons employé revient, en réalité, à ceci: ... définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui vont suivre. » Il n'est fait ici aucune allusion à la « construction » des éléments nouveaux.

Soit alors  $F$  l'ensemble des points qui sont chacun intérieurs à une infinité des intervalles  $I_n$ .  $F$  comprend  $E$  et appartient à la fermeture  $\bar{E}$  de  $E$ . En particulier, si  $E$  est fermé,  $E$  est identique à  $F$ .

III. On trouvera plus loin des applications très nombreuses de la notion de mesure dans la théorie de l'intégration, dans la théorie des fonctions et dans le calcul des probabilités.

#### RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

C'est au cours de ses études des fonctions monogènes que Borel a senti la nécessité d'introduire la notion d'ensemble de mesure nulle (*avant* d'avoir défini la mesure d'un ensemble). Les mêmes études lui ont fait voir qu'il faudrait distinguer entre les différentes sortes de mesure nulle. Et cette nécessité s'est présentée à nouveau en calcul des Probabilités. Il a alors introduit la notion de « mesure asymptotique » d'un ensemble [169], dont, beaucoup plus tard, il a légèrement modifié la définition sous le nom de « raréfaction » (d'un ensemble de mesure nulle). Cette notion nouvelle a moins attiré l'attention que celle de mesure. Et pourtant, nous sommes d'accord avec Borel pour penser que l'importance de cette classification des ensembles de mesure nulle « paraît devoir être comparable à celle de la notion même d'ensemble de mesure nulle. »

Mais si Borel a même pu imaginer trois modes distincts de classification, il n'en a pas établi les relations. Et s'il a obtenu des résultats importants, c'est en partant d'hypothèses qui ne sont pas toujours nécessaires et ne sont pas toujours suffisantes. Avant donc de prolonger et d'appliquer la théorie de Borel, il y aurait lieu de la revoir et de la compléter pour la rendre plus cohérente.

Pour toutes ces raisons, nous serions heureux si ces quelques lignes pouvaient inciter de jeunes chercheurs à entreprendre une étude plus systématique et plus complète de la raréfaction et à en donner des applications.

La première idée de Borel, [S, p. 185] consiste à établir une inégalité symbolique, (à définir), entre une sorte de « grandeur »