Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: Equations différentielles et aux dérivées partielles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

des combinaisons linéaires des coefficients de la série de Taylor et qui peut converger non seulement à l'intérieur du cercle de convergence de la série de Taylor mais même au-delà.

Borel a aussi découvert un autre moyen de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor. C'est en vue de ce moyen, qu'il avait créé la « sommation exponentielle absolue », définie plus haut (p. 51). Celle-ci lui permet d'assigner une somme généralisée à la série de Taylor, qui coïncide avec la somme ordinaire à l'intérieur du cercle de convergence mais qui existe encore jusqu'à une certaine distance de ce cercle sur tout rayon prolongée au-delà d'un point non singulier sur la circonférence du cercle. Plus précisément, la somme généralisée existe à l'intérieur du « polygone de sommabilité » de la série. Ce polygone s'obtient en menant une tangente au cercle en tout point singulier. (Ce polygone peut s'étendre dans certaines directions jusqu'à l'infini. Par exemple, pour la série Σz^n, le polygone de sommabilité sera évidemment le demi-plan contenant le cercle $|z| < 1$ et limité par la tangente au cercle au point $z = 1$).

Ce résultat important dépasse ceux de Weierstrass. Car Borel a formé des fonctions pour lesquelles il existe des régions où le prolongement a son sens, de la série de Taylor correspondante, est possible alors qu'il ne l'est pas par la méthode de Weierstrass du prolongement analytique.

Equations différentielles et aux dérivées partielles

Borel a étudié les relations entre une équation différentielle linéaire:

$$\mathscr{L}[y] \equiv L(x)\, y^{(n)} + P(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + T(x)\, y' + U(x)\, y = 0$$

et son équation adjointe:

$$\mathscr{M}[y] \equiv (Lz)^{(n)} - (Pz)^{(n)-1} + \ldots + (-1)^n\, Uz = 0\,.$$

On savait déjà, depuis Lagrange, que, par une suite d'intégration par parties, on arrive à la relation:

$$\int z\, \mathscr{L}[y]\, dx - \int y \mathscr{M}[z]\, dx = A\,(x, y, y', \ldots y^{n-1}, z, z', \ldots z^{(n-1)})$$

où A dépend linéairement de $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ et de $z, z', \ldots z^{(n-1)}$.

D'où il résultait que, si l'on connaît une solution z de l'équation adjointe, l'intégration de l'équation donnée est ramenée à celle d'une équation différentielle linéaire en y d'ordre $n-1$. Borel exprime géométriquement [S., p. 213] les relations entre une équation et son adjointe. On peut faire correspondre à $\mathscr{L}[y] = 0$ une courbe de l'espace à $n-1$ dimensions en regardant n intégrales distinctes de l'équation comme les coordonnées homogènes d'un point de la courbe dépendant du paramètre x. On pourra, de même, faire correspondre à l'équation adjointe, une autre courbe. Il résulte des relations établies par Darboux entre les solutions d'une équation et de son adjointe que les courbes qui leur sont attachées se correspondent dualistiquement. Borel observe qu'on pourrait prendre cette propriété géométrique comme définition de l'équation adjointe et que cette définition mettrait en évidence le fait que la relation entre les deux équations est réciproque. Mais il ajoute qu'il serait nécessaire de préciser un peu cette définition; d'abord les points correspondants des deux courbes devraient correspondre à la même valeur de x. Il faudrait ensuite multiplier les premiers membres des équations qui correspondent aux courbes pour que ces équations deviennent adjointes l'une de l'autre.

Borel cherche ensuite à quelle condition une équation est équivalente à son adjointe (cas où le recours aux solutions de l'adjointe pour intégrer l'équation donnée devient inopérant). Cette question a été d'abord étudiée par Darboux, qui a montré qu'entre n intégrales distinctes $y_1(x), \ldots y_n(x)$, il doit exister, alors, une relation quadratique:

$$\mathscr{C}[y] \equiv \sum_{i,k} a_{ik}\, y_i(x)\, y_k(x) = 0$$

Darboux avait montré que cette relation subsiste quand on y remplace les $y_i(x)$ par leurs dérivées jusqu'à un certain ordre:

$$\mathscr{C}[y] = 0, \qquad \mathscr{C}[y'] = 0, \ldots$$

Les considérations géométriques par lesquelles Borel retrouve ce résultat, lui permettent, en outre, d'en démontrer la réciproque et surtout de la généraliser. Il observe d'abord que si $2x+3$ fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement, vérifient une même relation quadratique homogène à coefficients cons-

tants, ce sont les solutions d'une équation d'ordre $2n+3$ équivalente à son adjointe. Puis il généralise ce résultat, toujours par ses méthodes géométriques.

Revenant ensuite au problème posé, Borel montre que, dans le cas où $\mathscr{C}$ n'est pas identiquement nulle (et où par suite les équations cherchées doivent être d'ordre impair), la recherche des équations identiques à leur adjointe se ramène à celle des lignes asymptotiques de la surface du second degré:

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,.$$

Il montre alors géométriquement comment les solutions de l'équation $\mathscr{L}[y] = 0$ s'expriment complètement sans signe de quadrature. Il passe alors au cas des équations $\mathscr{L}[y] = 0$ d'ordre pair et montre qu'on peut suivre une méthode géométrique analogue à celle suivie pour le cas de l'ordre impair en faisant jouer à un complexe « linéaire » le rôle que jouait la quadrique $\mathscr{C}(y) = 0$ Cependant on n'arrive pas à la détermination sans intégration des courbes cherchées. La méthode permet cependant d'obtenir tout au moins pour le sixième ordre, des expressions renfermant un seul signe de quadrature et relativement assez simples.

Borel a porté aussi son attention sur le mode de croissance des solutions des équations différentielles. Il a obtenu, par exemple, ce résultat d'une précision inattendue dans des circonstances si générales: Soit une équation différentielle dont on suppose seulement qu'elle est du premier ordre, qu'elle est algébrique en x, y, y' et que l'intégrale considérée, y, ne devient infinie pour aucune valeur finie de x: on peut dès lors affirmer que y croît moins vite que e^{ex}.

L'invention de la sommabilité a permis à Borel d'obtenir un théorème remarquable qui a été depuis souvent utilisé par divers auteurs pour déterminer exactement certaines solutions irrégulières de certaines équations différentielles. C'est le théorème suivant: si une série absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle, la somme généralisée de la série est une intégrale de l'équation.

Cauchy a montré que l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles dépend de certaines fonc-

tions arbitraires dépendant de certaines variables. Borel a précisé énormément ce résultat, dans le cas d'une seule équation, en montrant que l'intégrale générale peut s'exprimer comme une fonction déterminée d'une seule fonction arbitraire dépendant d'une seule variable.

On savait depuis longtemps que la nature analytique d'une fonction dépendant d'un paramètre peut dépendre considérablement de la nature arithmétique de ce paramètre. Tel est le cas de la fonction de z, z^a, dont la nature change selon que le paramètre, a, est entier, fractionnaire ou irrationnel. Mais la fonction z^a reste analytique.

Borel a étendu considérablement la portée de cette observation. Il a donné un exemple d'une équation aux dérivées partielles très simples:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial y^2} = \psi(x, y)$$

où une intégrale périodique, généralement analytique, cesse de l'être pour certaines valeurs du paramètre α. On a ainsi un exemple d'une fonction continue de deux variables réelles dont toutes les dérivées sont continues, mais qui n'est analytique en aucun point (x, y). Cet exemple est d'autant plus frappant qu'il ne s'agit pas ici d'un cas pathologique mais d'un problème fort simple où toutes les données sont supposées analytiques.

Géométrie

Rappelons d'abord que la définition et l'étude des propriétés de la mesure et de la raréfaction par Borel, si elles sont d'une importance extrême en analyse, relèvent cependant de la géométrie.

De même, Borel a étudié l'équation adjointe dont il a été question plus haut (p. 75) par des méthodes géométriques. Il y a en particulier obtenu d'importantes propositions concernant les « plans générateurs » des quadriques dans les espaces à n dimensions (qui jouent le même rôle que les génératrices des quadriques classiques).